

BÀI GIẢNG logic MỜ

(Fuzzy Logic)

TS. NGUYỄN HOÀNG SƠN

Mục lục

Danh sách hình vẽ	iii
Lời nói đầu	1
Chương 1. Tập mờ	2
1.1 Hàm đặc trưng của tập hợp	2
1.1.1 Định nghĩa	2
1.1.2 Các phép toán tập hợp biểu diễn qua hàm đặc trưng .	3
1.2 Khái niệm tập mờ	4
1.2.1 Định nghĩa	4
1.2.2 Biểu diễn tập mờ	5
1.2.3 Tính mờ và tính ngẫu nhiên	8
1.2.4 Xác định các hàm thuộc	9
1.2.5 Các đặc trưng cơ bản của tập mờ	9
1.2.6 Lát cắt của tập mờ	11
1.2.7 Tập mờ lõi và số mờ	12
1.2.8 Các phép toán trên các tập mờ	17
1.2.9 Định lý tách	25
1.2.10 Khoảng cách	26
1.3 Đại số tập mờ	35
1.3.1 Phép t -chuẩn	36
1.3.2 Phép t -đối chuẩn	37
1.3.3 Phép phủ định	38
1.3.4 Hệ đối ngẫu	39
1.3.5 Đại số tập mờ	39
Chương 2. Quan hệ mờ	42
2.1 Định nghĩa	42
2.2 Các phép toán trên quan hệ mờ	44
2.2.1 Phép hợp thành min-max	44
2.2.2 Phép hợp thành tích-max	46
2.2.3 Phép hợp thành max-min	47
2.3 Các tính chất cơ bản của quan hệ mờ	49
2.4 Bao đóng bắc cầu	54
2.4.1 Bao đóng bắc cầu min-max	54
2.4.2 Bao đóng bắc cầu tích-max	55
2.4.3 Bao đóng bắc cầu max-min	57
2.5 Quan hệ thứ tự mờ	59

2.6	Quan hệ tương tự mờ	60
2.7	Nguyên lý mở rộng	60
Chương 3. Logic mờ		63
3.1	Biến ngôn ngữ	63
3.1.1	Định nghĩa	63
3.1.2	Hạng từ mờ và gia tử mờ	66
3.2	Mệnh đề mờ	67
3.2.1	Mệnh đề mờ không điều kiện và không định tính . . .	67
3.2.2	Mệnh đề mờ không điều kiện và định tính	68
3.2.3	Kéo theo mờ	70
3.2.4	Mệnh đề mờ có điều kiện và không định tính	74
3.2.5	Mệnh đề mờ có điều kiện và định tính	75
3.3	Suy diễn mờ	76
3.3.1	Luật suy diễn mờ Modus Ponens	76
3.3.2	Luật suy diễn mờ Modus Tollen	78
3.3.3	Luật suy diễn mờ bắc cầu	80
3.4	Ứng dụng của logic mờ	81
Tài liệu tham khảo		85

Danh sách hình vẽ

1.2.1	<i>Giá đỡ, nhân và biên của tập mờ A</i>	10
1.2.2	<i>Các tập mờ hình tam giác</i>	15
1.2.3	<i>Tập mờ hình thang</i>	16
1.2.4	<i>Tập mờ hình L</i>	16
1.2.5	<i>Tập mờ Gamma tuyến tính</i>	17

Lời nói đầu

Lý thuyết tập mờ (fuzzy set) được đề xuất bởi giáo sư Lofti A. Zadeh¹ ở đại học California, Mỹ vào những năm 1965 với mục đích cung cấp một công cụ toán học chính xác để mô tả các thông tin không chính xác, mang tính nhập nhằng, mơ hồ (chẳng hạn như “số gần 2”, “nhiệt độ thấp”, “tốc độ nhanh”, “áp suất cao”, ...). Một trong những mảng rất quan trọng của lý thuyết tập mờ là logic mờ (fuzzy logic), được sử dụng cho lập luận xấp xỉ.

Với ý tưởng như vậy, ngay sau đó lý thuyết tập mờ được phát triển mạnh mẽ ở Mỹ và Tây Âu. Tuy nhiên chính các nhà nghiên cứu Nhật Bản từ những năm 1970 là những người đi tiên phong trong việc ứng dụng lý thuyết tập mờ. Hầu hết những ngành kỹ thuật, không nhiều thì ít đều có sử dụng đến lý thuyết tập mờ, đặc biệt là kỹ thuật điện. Có thể kể đến như điều khiển mờ, mạch điện tử dùng logic mờ, người máy, ... Rất nhiều lĩnh vực kỹ thuật khác cũng dùng lý thuyết tập mờ như điều khiển, cơ khí, máy tính, công nghiệp, nông nghiệp, hóa học, hạt nhân, tri thức, ...

Bài giảng này cấu trúc gồm 3 chương. Chương 1 giới thiệu về khái niệm tập mờ. Chương 2 trình bày về một bộ phận quan trọng của tập mờ là quan hệ mờ. Cuối cùng là chương 3, giới thiệu về logic mờ.

¹Lofti A. Zadeh (1921): nhà vật lý và khoa học máy tính người Iran gốc Azerbaijan. Ông nhận được 24 bằng tiến sĩ danh dự và hàng loạt giải thưởng cao quý.

Chương 1

Tập mờ

Tập mờ là một sự mở rộng của tập hợp thông thường trong lý thuyết tập hợp (thông thường hay còn gọi cổ điển). Ở đó quan hệ thành viên giữa một phần tử với một tập hợp được mở rộng từ tập hợp $\{0, 1\}$ lên khoảng đóng $[0, 1]$.

1.1 Hàm đặc trưng của tập hợp

1.1.1 Định nghĩa

Trong lý thuyết tập hợp thông thường, quan hệ thành viên của các phần tử trong một tập hợp A được đánh giá theo kiểu nhị phân một cách rõ ràng là mỗi phần tử x của tập vũ trụ U là thuộc A (ký hiệu $x \in A$) hoặc không thuộc A (ký hiệu $x \notin A$). Như vậy để xem một phần tử có là thành viên của tập A hay không, ta gán cho phần tử đó giá trị 1 nếu phần tử đó chắc chắn thuộc A và giá trị 0 nếu nó chắc chắn không thuộc A , tức là chúng ta có thể xây dựng một hàm thành viên (còn gọi là hàm đặc trưng) để đánh giá một phần tử có thuộc tập A hay không.

Một cách hình thức hàm đặc trưng được định nghĩa như sau. Cho tập vũ trụ U và tập con $A \subseteq U$. Hàm $\chi_A : U \rightarrow \{0, 1\}$ xác định bởi:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \in A \\ 0 & \text{ngược lại} \end{cases}$$

được gọi là *hàm đặc trưng* của tập A .

Ví dụ 1.1. Xét tập vũ trụ hữu hạn $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ và tập con $A = \{x_1, x_3, x_5\}$ của U . Khi đó ta có

$$\mu_A(x_1) = 1, \mu_A(x_2) = 0, \mu_A(x_3) = 1, \mu_A(x_4) = 0, \mu_A(x_5) = 1.$$

Từ điều này cho thấy chúng ta cũng có thể biểu diễn tập A kèm theo các phần tử của U cùng với các giá trị hàm đặc trưng tương ứng của nó:

$$A = \{(x_1, 1), (x_2, 0), (x_3, 1), (x_4, 0), (x_5, 1)\}.$$

1.1.2 Các phép toán tập hợp biểu diễn qua hàm đặc trưng

Bây giờ chúng ta tìm hiểu các hàm đặc trưng của các phép toán cơ bản trên tập hợp như hợp ($\cup$), giao ($\cap$), bù (^{c}), hiệu ($-$) và hiệu đối xứng ($\oplus$).

1.1.2.1 Phép hợp

Cho $A, B \subseteq U$. Hàm đặc trưng của $A \cup B$ xác định bởi:

$$\begin{aligned}\chi_{A \cup B}(x) &= \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \in A \cup B \\ 0 & \text{ngược lại} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{nếu } \chi_A(x) = 1 \text{ hoặc } \chi_B(x) = 1 \\ 0 & \text{nếu } \chi_A(x) = \chi_B(x) = 0 \end{cases} \\ &= \max(\chi_A(x), \chi_B(x)) \\ &= \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x)\chi_B(x).\end{aligned}$$

1.1.2.2 Phép giao

Cho $A, B \subseteq U$. Hàm đặc trưng của $A \cap B$ là:

$$\begin{aligned}\chi_{A \cap B}(x) &= \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \in A \cap B \\ 0 & \text{ngược lại} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{nếu } \chi_A(x) = \chi_B(x) = 1 \\ 0 & \text{nếu } \chi_A(x) = 0 \text{ hoặc } \chi_B(x) = 0 \end{cases} \\ &= \min(\chi_A(x), \chi_B(x)) \\ &= \chi_A(x)\chi_B(x).\end{aligned}$$

1.1.2.3 Phép lấy bù

Cho $A \subseteq U$. Hàm đặc trưng của $\bar{A} = U \setminus A$ là:

$$\begin{aligned}\chi_{\bar{A}}(x) &= \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \in \bar{A} \\ 0 & \text{ngược lại} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{nếu } \chi_A(x) = 0 \\ 0 & \text{nếu } \chi_A(x) = 1 \end{cases} \\ &= 1 - \chi_A(x).\end{aligned}$$

1.1.2.4 Phép hiệu

Cho $A, B \subseteq U$. Ta có $A \setminus B = A \cap \bar{B}$, do đó hàm đặc trưng của $A \setminus B$ là:

$$\chi_{A \setminus B}(x) = \min(\chi_A(x), 1 - \chi_B(x)).$$

1.1.2.5 Phép hiệu đối xứng

Cho $A, B \subseteq U$. Ta có $A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, do đó hàm đặc trưng của $A \oplus B$ là:

$$\chi_{A \oplus B}(x) = \max(\min(\chi_A(x), 1 - \chi_B(x)), \min(\chi_B(x), 1 - \chi_A(x))).$$

1.2 Khái niệm tập mờ

Khái niệm tập mờ là một sự mở rộng của khái niệm tập thông thường ở chỗ nó cho phép đánh giá nhiều mức độ khác nhau (hay từ từ) về quan hệ thành viên giữa một phần tử và một tập hợp, nhằm đáp ứng nhu cầu biểu diễn những tri thức không chính xác, mang tính nhập nhằng, mờ. Quan hệ này được mô tả bằng một hàm liên thuộc $\mu : U \rightarrow [0, 1]$.

Trong khuôn khổ lý thuyết tập mờ, đôi lúc để nhấn mạnh tập hợp thông thường với tập mờ chúng ta sẽ gọi tập hợp thông thường bằng *tập rõ* (crisp).

1.2.1 Định nghĩa

Cho tập vũ trụ U . Một *tập con mờ* (Fuzzy subset) A trong U là một hàm $\mu_A : U \rightarrow [0, 1]$. Hàm μ_A được gọi là *hàm thuộc* của tập con mờ A , còn $\mu_A(x)$

được gọi là *mức độ thuộc* của x vào tập con mờ A .

Như vậy hàm thuộc μ_A lượng hóa mức độ các phần tử x thuộc về tập U . Nếu hàm μ_A cho giá trị 0 đối với phần tử x thì có nghĩa x không có trong tập A đã cho, cho giá trị 1 thì có nghĩa x hoàn toàn thuộc tập A . Các giá trị trong khoảng mở $(0, 1)$ đặc trưng cho các phần tử mờ, tức là mức độ là thành viên của phần tử x đối với tập hợp A .

Rõ ràng mỗi tập rõ của U được xem như một tập con mờ của U với hàm thuộc chính là hàm đặc trưng. Để cho gọn cũng như phân biệt với tập rõ người ta thường gọi tập con mờ bằng tập mờ.

Nhiều tài liệu ký hiệu tập mờ A bằng $\tilde{A}$ hay $\bar{A}$ cho đặc trưng. Tập tất cả các tập mờ của U ký hiệu là $\mathcal{F}(U)$. Rõ ràng $\mathcal{P}(U) \subseteq \mathcal{F}(U)$, ở đây $\mathcal{P}(U)$ ký hiệu cho tập tất cả các tập con của U .

Ví dụ 1.2. Xét tập U gồm 10 người ký hiệu $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ trong đó mỗi người có số tuổi tương ứng là 5, 10, $\dots$, 50. Gọi A là tập hợp gồm những người “trẻ”. Khi đó A là một tập mờ trong U với hàm thuộc chẳng hạn như sau:

$$\begin{aligned}\mu_A(x_1) &= \mu_A(x_2) = \dots = \mu_A(x_6) = 1, \\ \mu_A(x_7) &= 0.8, \mu_A(x_8) = 0.7, \mu_A(x_9) = 0.6, \mu_A(x_{10}) = 0.5.\end{aligned}$$

Còn nếu gọi B là tập hợp những người “có tuổi không quá 40”, thì rõ ràng $B = \{x_1, x_2, \dots, x_8\}$ là một tập rõ của U . Tuy nhiên cũng có thể xem B là tập con mờ với hàm thuộc μ_B như sau:

$$\begin{aligned}\mu_B(x_1) &= \mu_B(x_2) = \dots = \mu_B(x_8) = 1, \\ \mu_B(x_9) &= \mu_B(x_{10}) = 0.\end{aligned}$$

1.2.2 Biểu diễn tập mờ

1.2.2.1 Phương pháp liệt kê

Là liệt kê các phần tử của tập mờ và mức thành viên tương ứng theo ký hiệu. Xét tập vũ trụ U và tập mờ A của U . Xảy ra các trường hợp sau:

(1) Nếu U là một tập hữu hạn, $U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, thì tập mờ A của U biểu diễn là:

$$A = \{(x_1, \mu_A(x_1)), (x_2, \mu_A(x_2)), \dots, (x_n, \mu_A(x_n))\}$$

hay

$$A = \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_A(x_2)}{x_2} + \cdots + \frac{\mu_A(x_n)}{x_n} = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_A(x_i)}{x_i}.$$

(2) Nếu U là một tập vô hạn đếm được, $U = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, thì tập mờ A của U biểu diễn bằng ký pháp:

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_A(x_n)}{x_n}.$$

(3) Nếu U là một tập vô hạn có lực lượng continuum, $U = [a, b]$, thì tập mờ A của U biểu diễn bằng ký pháp:

$$A = \int_a^b \frac{\mu_A(x)}{x}.$$

Lưu ý các ký pháp trong hai cách biểu diễn cuối cùng không liên quan gì đến chuỗi cũng như tích phân.

Chẳng hạn xét Ví dụ 1.2 ở trên. Khi đó tập mờ A được biểu diễn là:

$$A = \{(x_1, 1), (x_2, 1), \dots, (x_6, 1), (x_7, 0.8), (x_8, 0.7), (x_9, 0.6), (x_{10}, 0.5)\}.$$

hay

$$A = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_5} + \frac{1}{x_6} + \frac{0.8}{x_7} + \frac{0.7}{x_8} + \frac{0.6}{x_9} + \frac{0.5}{x_{10}}.$$

1.2.2.2 Phương pháp đồ thị

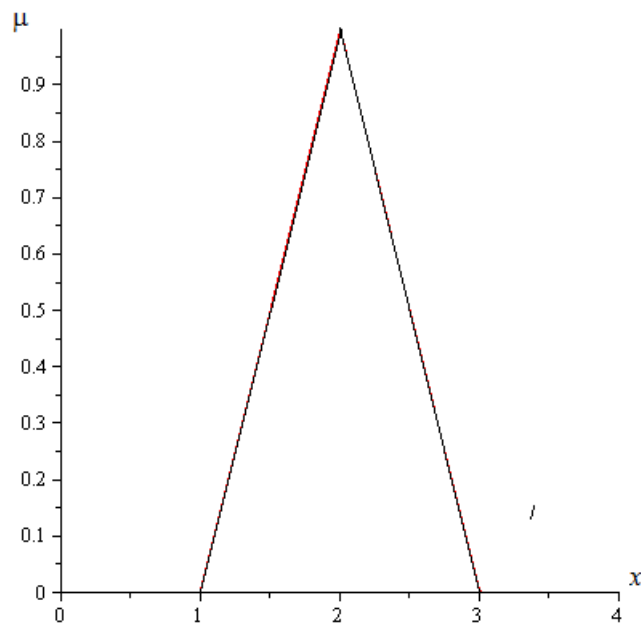
Là vẽ đồ thị của hàm thuộc $\mu_A(x)$ (biểu diễn mối quan hệ giữa mức thành viên và giá trị phần tử).

Ví dụ 1.3. Xét tập mờ A gồm những “số gần 2” có thể được xác định bởi

hàm thuộc như sau:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x < 1 \\ x - 1 & \text{nếu } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{nếu } x = 2 \\ 3 - x & \text{nếu } 2 < x \leq 3 \\ 0 & \text{nếu } x > 3 \end{cases}$$

Khi đó đồ thị hàm thuộc (hình tam giác) μ_A trên là



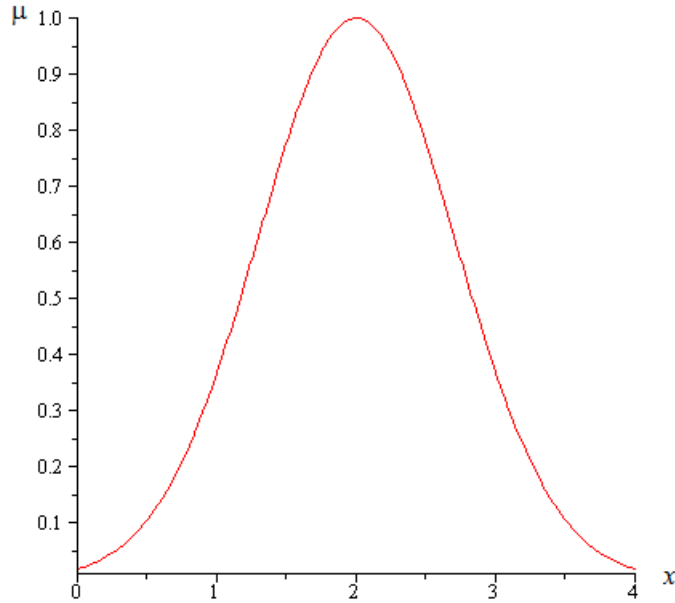
Lưu ý rằng hàm thuộc đặc trưng cho tập mờ “số gần 2” có thể được xác định một cách khác, chẳng hạn:

$$\mu_A(x) = e^{-(x-2)^2}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lúc đó ta viết:

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-(x-2)^2}}{x}$$

và đồ thị hàm thuộc (hình quả chuông) tương ứng là



1.2.3 Tính mờ và tính ngẫu nhiên

Ở trên chúng ta đã giới thiệu khái niệm tập mờ với mục đích để biểu diễn các tính chất mờ. Khi biểu diễn một tính chất mờ bởi một tập mờ A và x là một đối tượng bất kỳ thì mức độ thuộc của x vào tập mờ A là một số $\mu_A(x) \in [0, 1]$. Mặt khác chúng ta biết rằng xác suất của một sự kiện ngẫu nhiên e , $P(e)$, cũng là một số nằm giữa 0 và 1. Do đó một câu hỏi được đặt ra “có gì khác nhau giữa tính mờ (Fuzziness) và tính ngẫu nhiên (Randomness)?” Câu trả lời là “có”, đó là tính mờ mô tả sự không rõ ràng của một sự kiện, còn tính ngẫu nhiên mô tả sự không chắc chắn xuất hiện của một sự kiện. Một sự kiện ngẫu nhiên có thể xuất hiện hoặc không, xác suất biểu diễn mức độ thường xuyên xuất hiện của sự kiện ngẫu nhiên.

Sau đây là một ví dụ về sự khác nhau giữa tập mờ và xác suất.

Ví dụ 1.4 (Bezdek, 1993). Giả sử bạn đang ở trên sa mạc và khát nước. Người ta mang đến cho bạn hai chai nước gắn nhãn X và Y , trong đó trên chai gắn nhãn X ghi rằng nước trong chai này có mức độ thuộc vào tập mờ “nước uống được” là 0.95 và trên chai gắn nhãn Y ghi rằng xác suất để chai nước này uống được là 0.95. Hỏi bạn sẽ chọn chai nào trong hai chai nước này?

Ta biết mức độ thuộc 0.95 có nghĩa là nước trong chai gắn nhãn X là khá gần với nước tinh khiết, chẳng hạn nước máy của ta nó có thể lẫn tạp chất nhưng không ảnh hưởng lớn tới sức khỏe. Mặt khác xác suất để chai nước gắn nhãn Y uống được là 0.95 có nghĩa trong 100 lần lấy chai nước có

gắn nhãn Y có khoảng 95 lần nước trong chai là uống được (tinh khiết), song có 5 lần nước trong chai không phải là nước uống được (có thể nước độc hại cho sức khỏe, chẳng hạn axit). Rõ ràng trong trường hợp này bạn nên chọn chai nước gắn nhãn X .

Bây giờ giả sử bạn được quyền mở chai nước và lấy mẫu xét nghiệm. Sau khi xét nghiệm bạn sẽ biết chính xác nước trong chai gắn nhãn Y là nước uống được hay không. Xác suất 0.95 sẽ trở thành xác suất có điều kiện và bằng 1 trong trường hợp nước trong chai là uống được, còn bằng 0 trong trường hợp nước trong chai không uống được. Nhưng sau khi xét nghiệm thì mức độ thuộc 0.95 của chai nước gắn nhãn X vẫn là 0.95.

1.2.4 Xác định các hàm thuộc

Một tập mờ trong vũ trụ U được định nghĩa là một hàm thuộc xác định trên U và nhận giá trị trong đoạn $[0, 1]$. Như vậy xác định một tập mờ có nghĩa là xác định hàm thuộc của nó. Một câu hỏi đặt ra “làm thế nào để xác định được các hàm thuộc”? Các nhà nghiên cứu tập mờ đã đưa ra rất nhiều phương pháp để tính mức độ thuộc của một đối tượng x vào một tập mờ A . Sau đây là một số phương pháp tiêu biểu:

- Phương pháp trực quan
- Phương pháp suy diễn dựa trên tri thức về lĩnh vực
- Phương pháp sử dụng mạng neural
- Phương pháp sử dụng thuật toán di truyền.

Lưu ý rằng lĩnh vực nghiên cứu và tìm thêm các phương pháp xác định hàm thuộc này vẫn còn đang được phát triển mạnh.

1.2.5 Các đặc trưng cơ bản của tập mờ

Sau đây là một số đặc trưng cơ bản của tập mờ, những đặc trưng này chỉ rõ sự khác biệt của tập mờ so với tập rõ.

Cho tập mờ $A \in \mathcal{F}(U)$. Tập các phần tử $x \in U$ có độ thuộc $\mu_A(x) > 0$ được gọi là *giá đỡ* (Support) của A , ký hiệu $support(A)$. Tức là

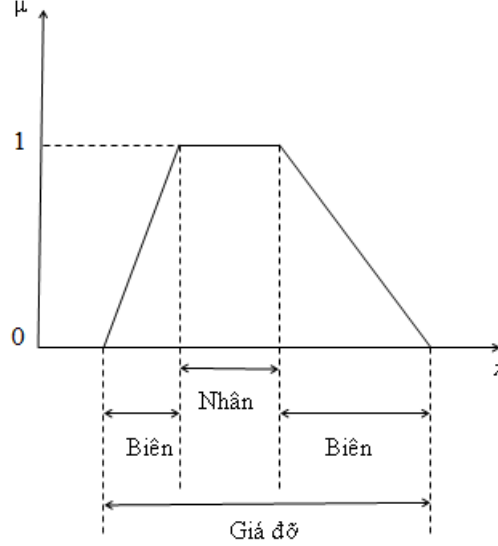
$$support(A) = \{x \in U : \mu_A(x) > 0\}.$$

Rõ ràng giá đỡ của tập mờ A là một tập rõ.

Tập các phần tử $x \in U$ có độ thuộc vào tập mờ A bằng 1 được gọi là *nhân* (Kernel) của A và ký hiệu là $\ker(A)$:

$$\ker(A) = \{x \in U : \mu_A(x) = 1\}.$$

Còn các phần tử $x \in U$ sao cho $0 < \mu_A(x) < 1$ được gọi là *biên* của A .
Hình 1.2.1 sau minh họa cho giá đỡ, nhân và biên của một tập mờ.



Hình 1.2.1: Giá đỡ, nhân và biên của tập mờ A

Cận trên của các độ thuộc $\mu_A(x)$ với mọi $x \in U$ được gọi là *độ cao* (Height) của tập mờ A , ký hiệu $\text{height}(A)$. Tức là

$$\text{height}(A) = \sup_{x \in U} \mu_A(x).$$

Như vậy $\text{height}(A)$ là độ thuộc lớn nhất mà một phần tử của U thuộc vào A . Do đó nó là một số thuộc trong đoạn $[0, 1]$.

Các tập mờ có độ cao bằng 1 được gọi là *tập mờ chuẩn hóa*. Trường hợp độ cao của các tập mờ nhỏ hơn 1 thì tập mờ đó được gọi là *tập mờ dưới chuẩn*. Như vậy tập mờ A của U là chuẩn hóa nếu và chỉ nếu có ít nhất một phần tử của U thật sự thuộc A hay nhân của A là khác rỗng.

Các phần tử $x \in U$ có $\mu_A(x) = \text{height}(A)$ được gọi là *lõi* (Core) của tập mờ A , ký hiệu $\text{core}(A)$. Tức là

$$\text{core}(A) = \{x \in U : \mu_A(x) = \text{height}(A)\}.$$

Tổng các mức độ thuộc của các phần tử $x \in U$ vào tập mờ A được gọi

là *lực lượng* của A , ký hiệu $|A|$. Tức là:

$$|A| = \sum_{x \in U} \mu_A(x) \quad (1.2.1)$$

Rõ ràng nếu A là tập rõ thì $\mu_A(x) = 1$ với mọi $x \in A$, suy ra tổng (1.2.1) đúng bằng số phần tử của tập A (trùng với định nghĩa lực lượng của tập rõ).

Ví dụ 1.5. Cho tập con mờ $A = \{(x_1, 0.1), (x_2, 0), (x_3, 0.8), (x_4, 0.7), (x_5, 0.8), (x_6, 0), (x_7, 0.3), (x_8, 0.5), (x_9, 0.8)\}$ trên tập vũ trụ $U = \{x_1, x_2, \dots, x_9\}$.

Khi đó ta có:

- $\text{support}(A) = \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_7, x_8, x_9\}$
- $\text{height}(A) = 0.8$, do đó A là tập con mờ dưới chuẩn
- $\text{core}(A) = \{x_3, x_5, x_9\}$
- $\text{ker}(A) = \emptyset$
- $|A| = 4$.

1.2.6 Lát cắt của tập mờ

1.2.6.1 Định nghĩa

Cho tập mờ $A \in \mathcal{F}(U)$ và hệ số $\alpha \in [0, 1]$. Tập các phần tử $x \in U$ có độ thuộc vào tập mờ A không nhỏ hơn α được gọi là *lát cắt α* (hay *tập mức α*) của A , ký hiệu A_α . Tức là:

$$A_\alpha = \{x \in U : \mu_A(x) \geq \alpha\}.$$

Rõ ràng lát cắt A_α là một tập rõ và có hàm đặc trưng là:

$$\mu_{A_\alpha}(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } \mu_A(x) \geq \alpha \\ 0 & \text{ngược lại.} \end{cases}$$

Xét Ví dụ 1.5 ở trên. Với $\alpha = 0.3$ ta có $A_\alpha = \{x_3, x_4, x_5, x_7, x_8, x_9\}$.

Trường hợp nếu thay dấu $\geq$ bằng dấu $>$ trong định nghĩa của A_α thì tập A_α được gọi là *lát cắt α mạnh* (hay *chặt*) của A .

1.2.6.2 Một số tính chất cơ bản

Mệnh đề 1.1. Các lát cắt α của tập mờ A là những tập rõ của U lồng nhau đối với giá trị của mức α , tức là:

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \Rightarrow A_{\alpha_1} \supseteq A_{\alpha_2}.$$

Chứng minh. Suy ra từ định nghĩa của lát cắt. □

Hệ quả 1.1. (1) Nếu $\alpha = 1$ thì lát cắt A_α là lát cắt nhỏ nhất, có thể bằng rỗng, và cũng chính là hạt nhân của A .

(2) Nếu $\alpha = \text{height}(A)$ thì

$$A_\alpha = \bigcap_{\beta \leq \alpha} A_\beta.$$

(3) Nếu $\alpha = 0$ thì lát cắt A_α là lát cắt lớn nhất và bằng chính tập vũ trụ U .

1.2.6.3 Biểu diễn các tập mờ qua các lát cắt của nó

(logic mờ và ứng dụng, tr. 22)

1.2.7 Tập mờ lồi và số mờ

Các tập mờ được sử dụng rộng rãi nhất trong các ứng dụng là các tập mờ trên không gian vectơ Euclide n chiều $\mathbb{R}^n$, đặc biệt trên đường thẳng thực $\mathbb{R}$. Chẳng hạn khi tập vũ trụ U là một tập số thực $\mathbb{R}$ (hoặc tập con của $\mathbb{R}$), biểu diễn các giá trị bằng số như *chiều cao, khoảng cách, trọng lượng, tuổi tác, mức lương, nhiệt độ, ...* thì các tập mờ trên U sẽ biểu diễn các giá trị ‘mờ’ phổ biến như *gần, xa, cao, thấp, nặng, nhẹ, trẻ, già, ...*

1.2.7.1 Định nghĩa

Xét A là một tập mờ trong không gian vectơ Euclide n chiều $\mathbb{R}^n$ và hệ số $\alpha \in [0, 1]$. Tập mờ A được gọi là *tập mờ lồi* (Convex fuzzy set) nếu mọi lát cắt A_α đều là tập lồi trong không gian vectơ $\mathbb{R}^n$.

Sử dụng khái niệm tập lồi trong không gian vectơ $\mathbb{R}^n$ và lát cắt α chúng ta dễ kiểm chứng được khẳng định:

$$\mu_A(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}^n$ và số thực $\lambda \in (0, 1)$. Người ta cũng thường sử dụng tính chất này làm định nghĩa cho tập mờ lồi. Tập mờ lồi cũng một số tính chất cơ bản chẳng hạn như giao của hai tập mờ lồi trong không gian vectơ $\mathbb{R}^n$ cũng là một tập mờ lồi.

Khi A là tập mờ lồi và chuẩn hóa thì A được gọi là một *số mờ* (Fuzzy number).

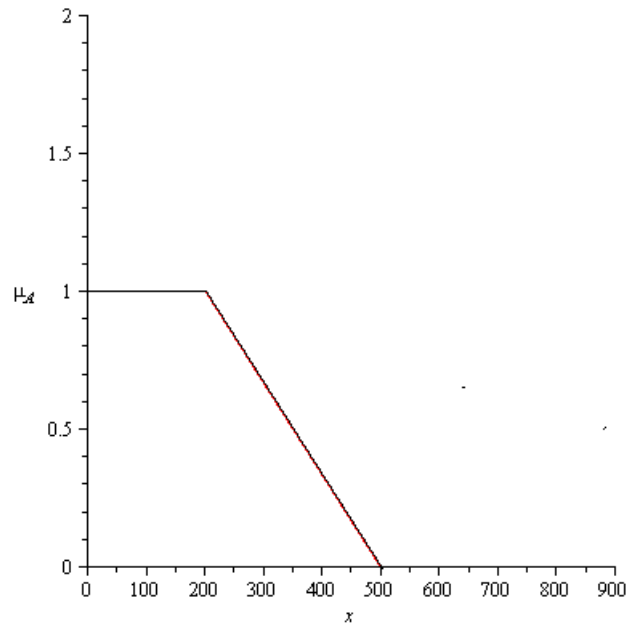
Như vậy số mờ là một tập mờ lồi và chuẩn hóa A sao cho hàm thuộc μ_A ít nhất liên tục từng đoạn và có $\mu_A(x) = 1$ tại một điểm nào đó. Số mờ được dùng để xấp xỉ một điểm (hay một vectơ) cho trước trong không gian vectơ $\mathbb{R}^n$. Trường hợp trên tập số thực $\mathbb{R}$, thì số mờ sẽ biểu diễn một số, số này xấp xỉ của một số thực cho trước. Bên cạnh đó hàm thuộc của số mờ cũng không nhất thiết phải đối xứng.

Ví dụ 1.6. Xét tập B các ngôi nhà “gần bãi biển” tại một địa phương nào đó. Thông thường ta có thể hiểu cách bãi biển 50m là gần hay có thể cách bãi biển đến 200m vẫn là gần, nhưng trên 200m thì tính chất ‘gần bãi biển’ sẽ ít dần đi và từ 500m trở lên thì không còn coi là gần bãi biển nữa. Có thể biểu diễn những tri thức trên bằng một tập mờ, nếu gọi A là tập khoảng cách đến bãi biển của các ngôi nhà ‘gần bãi biển’ thì A sẽ là một tập mờ trên tập số thực $\mathbb{R}$ với hàm thuộc là:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } 0 < x < 200 \\ \frac{500 - x}{300} & \text{nếu } 200 < x < 500 \\ 0 & \text{nếu } x \geq 500 \end{cases}$$

Rõ ràng hàm thuộc μ_A là một hàm lồi, do đó tập mờ A xác định bởi μ_A là tập mờ lồi. Mặt khác A cũng là tập mờ chuẩn hóa. Vậy suy ra A là một số mờ.

Đồ thị của số mờ A có dạng:



1.2.7.2 Các số mờ thường được sử dụng

Việc nghiên cứu các phép toán số học như “+ , − , × , /” và các phép toán so sánh trên các số mờ là nội dung của lĩnh vực *số học mờ*, đây là một nhánh của lý thuyết tập mờ, nó đóng một vai trò quan trọng trong các ứng dụng của *hệ mờ* (Fuzzy system). Các số mờ thường được sử dụng nhiều trong các ứng dụng như số mờ hình tam giác, số mờ hình thang, số mờ hình L , số mờ hình S và số mờ Gamma tuyến tính.

Dưới đây là các số mờ đề cập ở trên cùng với các biểu thức giải tích của các hàm thuộc của các số mờ này.

(1) Số mờ hình tam giác

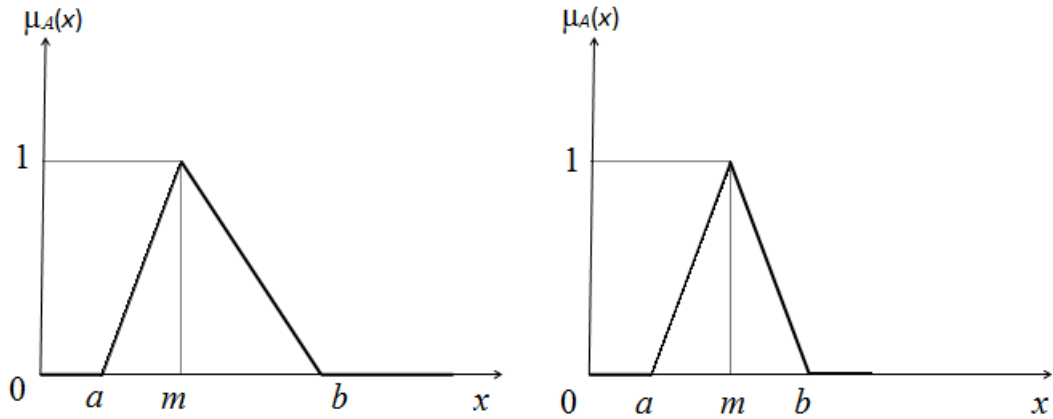
Hàm thuộc tam giác là hàm xác định bởi cận dưới a , cận trên b và giá trị m với $a < m < b$. Hàm thuộc tam giác được gọi là *đối xứng* nếu

$$m = \frac{a + b}{2}$$

hay giá trị $b - m$ bằng giá trị $a - m$:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \leq a \text{ hoặc } x \geq b \\ \frac{x-a}{m-a} & \text{nếu } a < x < m \\ \frac{b-x}{b-m} & \text{nếu } m < x < b \\ 1 & \text{nếu } x = m \end{cases}$$

Đồ thị của các hàm thuộc tam giác (đối xứng và không đối xứng) là:



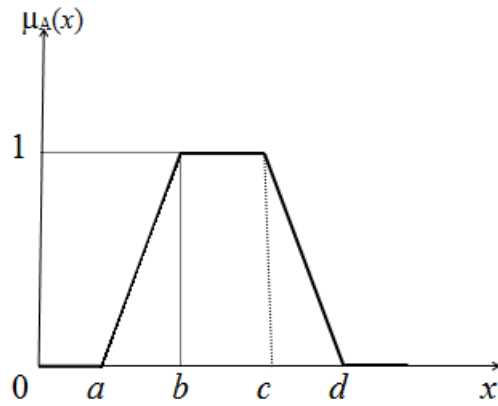
Hình 1.2.2: Các tập mờ hình tam giác

(2) Số mờ hình thang

Hàm thuộc hình thang là hàm xác định bởi bộ bốn giá trị a, b, c, d theo công thức sau:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \leq a \text{ hoặc } x \geq d \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{nếu } a < x < b \\ \frac{d-x}{d-c} & \text{nếu } c < x < d \\ 1 & \text{nếu } b \leq x \leq c \end{cases}$$

Đồ thị của hàm thuộc hình thang có dạng sau:



Hình 1.2.3: Tập mờ hình thang

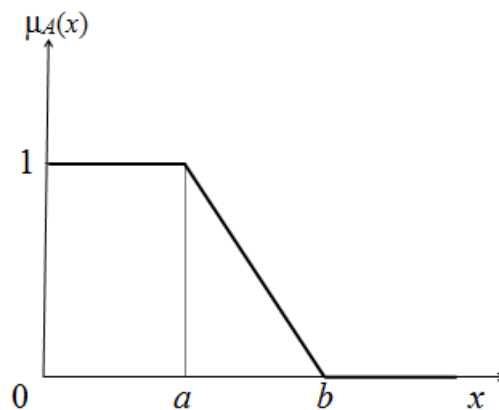
Có thể thấy số mờ hình tam giác là một trường hợp riêng của số mờ hình thang khi $b = c$.

(3) Số mờ hình L

Hàm thuộc L là hàm được xác định bởi hai tham số a và b theo công thức sau:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \leq a \\ \frac{b-x}{b-a} & \text{nếu } a < x < b \\ 0 & \text{nếu } x \geq b \end{cases}$$

Đồ thị của hàm thuộc L có dạng:



Hình 1.2.4: Tập mờ hình L

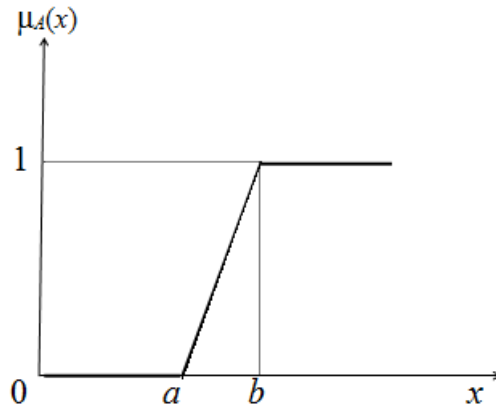
Hàm thuộc trong Ví dụ 1.6 ở trên là hàm thuộc hình L với $a = 200$ và $b = 500$.

(4) Số mờ Gamma tuyến tính

Hàm thuộc Gamma tuyến tính còn được gọi là hàm thuộc *L-trái*, có dạng ngược với hàm thuộc *L*, là hàm được xác định bởi hai tham số a và b theo công thức sau:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{nếu } a < x < b \\ 1 & \text{nếu } x \geq b \end{cases}$$

Đồ thị của hàm thuộc Gamma tuyến tính có dạng sau:



Hình 1.2.5: Tập mờ Gamma tuyến tính

Như vậy các tập mờ lõi là những tập mờ có hàm thuộc “đều đặn”, có nghĩa không có những chỗ đứt đoạn đột ngột. Điều này biểu diễn đúng tính cách cấp độ và việc chuyển nhích dần từ chỗ không thỏa mãn tính chất mà chúng kết hợp tới sự thỏa mãn. Rõ ràng khi ta yêu cầu một ai đó vẽ một đường cong mà người đó cho là thích hợp nhất để định nghĩa hàm thuộc của một tập mờ biểu diễn một giá trị xấp xỉ (chẳng hạn như “khoảng 20”, “chừng 1000”) hay một đặc trưng mơ hồ (chẳng hạn như “trẻ”, “xa”) thì người đó thường vẽ một tam giác hay một hình thang tùy từng trường hợp, có thể mở về bên trái hoặc bên phải; hay một đường cong hình quả chuông, có thể mở về bên trái hoặc bên phải.

1.2.8 Các phép toán trên các tập mờ

Như đã trình bày ở trên khái niệm tập mờ trong tập vũ trụ U là một sự mở rộng khái niệm tập con rõ của U . Lớp các tập mờ được hiểu như là một đại số $FS = (M, O)$, trong đó M là tập các (hàm thuộc) ánh xạ từ $U \rightarrow [0, 1]$ và

O là tập các phép toán trên M . Các phép toán trong O được xây dựng sao cho chúng tương đương với các phép toán thông thường của lý thuyết tập rỗng khi các hàm thuộc chỉ nhận hai giá trị 0 và 1. Mục này sẽ tìm hiểu các phép toán cơ bản sau.

1.2.8.1 Phép bao hàm

Cho hai tập mờ $A, B \in \mathcal{F}(U)$. Ta nói tập mờ A *bao hàm trong* (hay *chứa trong*) tập mờ B , ký hiệu $A \subseteq B$, nếu với mỗi $x \in U$ ta có $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$. Trường hợp nếu $A \subseteq B$ và $B \subseteq A$ ta nói hai tập mờ A và B là *bằng nhau* và ký hiệu $A = B$.

Như vậy $A = B$ khi và chỉ khi

$$\forall x \in U, \mu_A(x) = \mu_B(x).$$

Rõ ràng phép bao hàm trên xác định một thứ tự bộ phận trên $\mathcal{F}(U)$. Khi $A \subseteq B$ thì ta có thể viết lại $B \supseteq A$ và nói B *bao hàm* (hay *chứa*) A . Trường hợp nếu có một phần tử $x \in U$ sao cho $\mu_A(x) \neq \mu_B(x)$ thì ta nói hai tập mờ A và B là *khác nhau* và ký hiệu $A \neq B$.

Ví dụ 1.7. Xét tập $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ và hai tập mờ trên U là $A = \{(x_1, 0.4), (x_2, 0.2), (x_3, 0), (x_4, 1)\}$, $B = \{(x_1, 0.3), (x_2, 0), (x_3, 0), (x_4, 0)\}$.

Rõ ràng ta có $B \subseteq A$, A không bao hàm trong B và do đó $A \neq B$.

1.2.8.2 Phép hợp và giao

Cho hai tập mờ $A, B \in \mathcal{F}(U)$. *Hợp* hai tập mờ A và B , ký hiệu $A \cup B$, là một tập mờ với hàm thuộc xác định bởi:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)), \forall x \in U.$$

Như vậy $A \cup B$ là tập mờ nhỏ nhất chứa cả A và B . Người ta còn ký hiệu gọn lại $\max(\mu_A(x), \mu_B(x))$ bằng $\mu_A(x) \vee \mu_B(x)$.

Tổng quát nếu $(A_i)_{i \in I}$ là một họ các tập mờ trên U thì hợp của họ này là một tập mờ trên U , ký hiệu $\bigcup_{i \in I} A_i$, với hàm thuộc xác định bởi:

$$\mu_{\bigcup_{i \in I} A_i}(x) = \sup\{\mu_{A_i}(x) \mid i \in I\}$$

và được ký hiệu lại $\bigvee_{i \in I} \mu_{A_i}(x)$.

Tương tự như vậy *giao* của hai tập mờ A và B , ký hiệu $A \cap B$, là tập mờ lớn nhất chứa trong A và B với hàm thuộc xác định bởi:

$$\begin{aligned}\mu_{A \cap B}(x) &= \min(\mu_A(x), \mu_B(x)), \forall x \in U \\ &= \mu_A(x) \wedge \mu_B(x), \forall x \in U.\end{aligned}$$

Và nếu $(A_i)_{i \in I}$ là một họ các tập mờ trên U thì giao của họ này cũng là một tập mờ trên U , ký hiệu $\bigcap_{i \in I} A_i$, với hàm thuộc xác định là:

$$\mu_{\bigcap_{i \in I} A_i}(x) = \inf\{\mu_{A_i}(x) \mid i \in I\}$$

và còn được ký hiệu lại $\bigwedge_{i \in I} \mu_{A_i}(x)$.

Xét Ví dụ 1.7 ở trên ta có:

$$\begin{aligned}A \cup B &= \{(x_1, 0.4), (x_2, 0.2), (x_3, 0), (x_4, 1)\} \\ A \cap B &= \{(x_1, 0.3), (x_2, 0), (x_3, 0), (x_4, 0)\}.\end{aligned}$$

Tương tự như trong lý thuyết tập rõ, định nghĩa hợp và giao của các tập mờ cũng dẫn chúng ta đến các tính chất cơ bản sau. Tính đúng của các tính chất này là dễ dàng suy ra từ định nghĩa của các phép toán hợp và giao đối với các tập mờ.

Mệnh đề 1.2. Với mọi $A, B, C \in \mathcal{F}(U)$ ta có

- (1) Tính giao hoán: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$
- (2) Tính kết hợp: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- (3) Tính phân phối: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- (4) Tính đồng nhất: $A \cap U = A, A \cup \emptyset = A$
- (5) Tính nuốt: $A \cap \emptyset = \emptyset, A \cup U = U$
- (6) Tính lũy đẳng: $A \cap A = A, A \cup A = A$
- (7) Tính hấp thu: $A \cap (A \cup B) = A, A \cup (A \cap B) = A$
- (5) $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$
- (8) $|A| + |B| = |A \cap B| + |A \cup B|.$

Dễ thấy nếu A và B là các tập mờ chuẩn hóa thì giao của chúng chưa chắc là tập mờ chuẩn hóa. Tuy nhiên hợp của hai tập mờ chuẩn hóa là một tập mờ chuẩn hóa, và ngược lại hợp của hai tập mờ chỉ có thể chuẩn hóa khi ít nhất một trong hai chúng là chuẩn hóa.

Trên các phép hợp, giao và quan hệ bao hàm lát cắt của tập mờ thỏa một số tính chất cơ bản sau

Mệnh đề 1.3. Cho $A, B \in \mathcal{F}(U)$ và hệ số $\alpha \in [0, 1]$. Khi đó

$$(1) (A \cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha$$

$$(2) (A \cup B)_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha$$

$$(3) A \subseteq B \Rightarrow A_\alpha \subseteq B_\alpha.$$

Chứng minh. Theo định nghĩa lát cắt và các biểu diễn của hàm đặc trưng qua các phép toán hợp, giao trên các tập rõ ta có: với mọi $x \in U$

$$\begin{aligned} \mu_{(A \cap B)_\alpha}(x) &= \begin{cases} 1 & \text{nếu } \mu_{A \cap B}(x) \geq \alpha \\ 0 & \text{ngược lại} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{nếu } \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) \geq \alpha \\ 0 & \text{ngược lại} \end{cases} \\ &= \min(\mu_{A_\alpha}(x), \mu_{B_\alpha}(x)) \\ &= \mu_{A_\alpha \cap B_\alpha}(x) \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} \mu_{(A \cup B)_\alpha}(x) &= \begin{cases} 1 & \text{nếu } \mu_{A \cup B}(x) \geq \alpha \\ 0 & \text{ngược lại} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{nếu } \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) \geq \alpha \\ 0 & \text{ngược lại} \end{cases} \\ &= \max((\mu_{A_\alpha}(x), \mu_{B_\alpha}(x))) \\ &= \mu_{A_\alpha \cup B_\alpha}(x). \end{aligned}$$

Như vậy các mệnh đề (1) và (2) được chứng minh.

(3) ...

□

1.2.8.3 Phép lấy bù

Cho tập mờ $A \in \mathcal{F}(U)$. *Phần bù* của tập mờ A trong U , ký hiệu $\overline{A}$, là một tập mờ trong U với hàm thuộc xác định bởi:

$$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x).$$

Xét Ví dụ 1.7 ở trên ta có:

$$\overline{A} = \{(x_1, 0.6), (x_2, 0.8), (x_3, 1), (x_4, 0)\}.$$

Như vậy phần bù của một tập mờ chứa những phần tử với độ thuộc càng cao nếu độ thuộc của phần tử này vào tập mờ càng nhỏ. Nói cách khác, một phần tử càng ít có khả năng thuộc vào tập mờ A thì càng có nhiều khả năng thuộc vào tập mờ $\overline{A}$. Do đó khác với các tập rõ, trong các tập mờ nói chung thì

$$\overline{A} \cap A \neq \emptyset, \overline{A} \cup A \neq U$$

tức là không thỏa các tính chất thông thường của luật phi mâu thuẫn và luật bài trung. Đây là sự khác nhau quan trọng giữa tập rõ và tập mờ. Tuy vậy các tính chất khác của lý thuyết tập rõ thì vẫn còn đúng.

Mệnh đề 1.4. Với mọi $A, B \in \mathcal{F}(U)$ ta có

- (1) *Tính bù kép:* $\overline{\overline{A}} = A$
- (2) *Luật De Morgan:* $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- (3) $\overline{\emptyset} = U, \overline{U} = \emptyset$
- (4) $|A| + |\overline{A}| = |U|$.

Tính đúng của Mệnh đề 1.4 là dễ dàng suy ra từ định nghĩa của các phép toán bù, hợp và giao đối với các tập mờ.

Giá đỡ và hạt nhân của tập mờ và phần bù của nó có mối quan hệ sau:

Mệnh đề 1.5. Cho $A \in \mathcal{F}(U)$. ta có

- (1) $\overline{\text{support}(\overline{A})} = \text{ker}(A)$
- (2) $\overline{\text{ker}(\overline{A})} = \text{support}(A)$.

Dễ thấy tập $\mathcal{F}(U)$ là một dàn phân phối trong đó quan hệ thứ tự là phép bao hàm và với mọi $A, B \in \mathcal{F}(U)$, $A \cap B$ và $A \cup B$ tương ứng là cận

dưới và cận trên của $\mathcal{F}(U)$. Tuy nhiên dàn $\mathcal{F}(U)$ không bù vì nó không chứa hai phần tử A', B' sao cho với mọi $A \in \mathcal{F}(U)$ thì

$$A \cap \overline{A} = A', A \cup \overline{A} = B'.$$

1.2.8.4 Phép hiệu và hiệu đối xứng

Cho hai tập mờ $A, B \in \mathcal{F}(U)$. *Hiệu* của hai tập mờ A và B , ký hiệu $A \setminus B$, là một tập mờ trên U xác định bởi

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}.$$

Như vậy hàm thuộc của tập mờ $A \setminus B$ là $\mu_{A \setminus B}(x) = \mu_A(x) \wedge (1 - \mu_B(x))$.

Hiệu đối xứng của hai tập mờ A và B , ký hiệu $A \oplus B$, là một tập mờ trên U xác định bởi

$$A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Tức là $\mu_{A \oplus B}(x) = [\mu_A(x) \wedge (1 - \mu_B(x))] \vee [\mu_B(x) \wedge (1 - \mu_A(x))]$.

Xét Ví dụ 1.7 ở trên ta có:

$$\begin{aligned} A \setminus B &= \{(x_1, 0.4), (x_2, 0.2), (x_3, 0), (x_4, 1)\} \\ B \setminus A &= \{(x_1, 0.3), (x_2, 0), (x_3, 0), (x_4, 0)\} \\ A \oplus B &= \{(x_1, 0.4), (x_2, 0.2), (x_3, 0), (x_4, 1)\}. \end{aligned}$$

1.2.8.5 Tích Descartes

Cho họ các tập mờ $A_i \in \mathcal{F}(U_i)$, $i \in I$. *Tích Descartes* của họ các tập mờ $(A_i)_{i \in I}$, ký hiệu $\prod_{i \in I} A_i$, là một tập mờ trên tích Descartes $\prod_{i \in I} U_i$ với hàm thuộc xác định là:

$$\mu_{\prod_{i \in I} A_i}(x) = \bigwedge_{i \in I} \mu_{A_i}(x_i), \quad x = (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} U_i.$$

1.2.8.6 Tổng đại số và tích đại số

Cho hai tập mờ $A, B \in \mathcal{F}(U)$. *Tích đại số* (Algebraic product) của hai tập mờ A và B , ký hiệu $A \cdot B$, là một tập mờ trên U với hàm thuộc xác định bởi

$$\mu_{A \cdot B}(x) = \mu_A(x)\mu_B(x).$$

Tổng đại số (Algebraic sum) của hai tập mờ A và B , ký hiệu $A \overset{\wedge}{+} B$, là một tập mờ trên U với hàm thuộc xác định bởi

$$\mu_{A \overset{\wedge}{+} B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x).$$

Có thể thấy nếu A và B là hai tập con rõ của U thì

$$A \cap B = A \cdot B \text{ và } A \cup B = A \overset{\wedge}{+} B.$$

Xét Ví dụ 1.7 ở trên ta có

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \{(x_1, 0.12), (x_2, 0), (x_3, 0), (x_4, 0)\} \\ A \overset{\wedge}{+} B &= \{(x_1, 0.58), (x_2, 0.2), (x_3, 0), (x_4, 1)\}. \end{aligned}$$

Các phép toán tổng và tích đại số trên các tập mờ cũng có một số tính chất cơ bản sau, tuy nhiên các tính chất này hạn chế hơn so với các phép toán hợp và giao trên các tập rõ.

Mệnh đề 1.6. Cho $A, B, C \in \mathcal{F}(U)$. Khi đó

- (1) *Tính giao hoán:* $A \cdot B = B \cdot A, A \overset{\wedge}{+} B = B \overset{\wedge}{+} A$
- (2) *Tính kết hợp:* $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C), (A \overset{\wedge}{+} B) \overset{\wedge}{+} C = A \overset{\wedge}{+} (B \overset{\wedge}{+} C)$
- (3) *Tính phân phối (đối với phép hợp và giao):*
 $A \cdot (B \cup C) = A \cdot B \cup A \cdot C, A \cdot (B \cap C) = A \cdot B \cap A \cdot C$
 $A \overset{\wedge}{+} (B \cup C) = (A \overset{\wedge}{+} B) \cup (A \overset{\wedge}{+} C), A \overset{\wedge}{+} (B \cap C) = (A \overset{\wedge}{+} B) \cap (A \overset{\wedge}{+} C)$
- (4) *Tính đồng nhất:* $A \cdot U = A, A \overset{\wedge}{+} \emptyset = A$
- (5) *Tính nuốt:* $A \cdot \emptyset = \emptyset, A \overset{\wedge}{+} U = U$
- (6) *Luật De Morgan:* $\overline{A \cdot B} = \overline{A} \overset{\wedge}{+} \overline{B}, \overline{A \overset{\wedge}{+} B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

Chứng minh. Giả sử $\mu_A(x) = a, \mu_B(x) = b, \mu_C(x) = c$. Ta chứng minh một số tính chất sau.

(2) Ta có $(ab)c = a(bc)$ là hiển nhiên, suy ra công thức $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ luôn đúng.

Ngoài ra công thức $(A \overset{\wedge}{+} B) \overset{\wedge}{+} C = A \overset{\wedge}{+} (B \overset{\wedge}{+} C)$ là đúng nếu

$$(a + b - ab) + c - (a + b - ab)c = a + (b + c - bc) - a(b + c - bc) \quad (1.2.2)$$

là đúng. Khai triển hai vế (1.2.2) ta có:

$$a + b - ab + c - ac - bc - abc = a + b + c - bc - ab - ac - abc \quad (1.2.3)$$

Đồng thức (1.2.3) rõ ràng đúng. Do vậy $(A \overset{\wedge}{+} B) \overset{\wedge}{+} C = A \overset{\wedge}{+} (B \overset{\wedge}{+} C)$.

(6) Chứng minh $\overline{A \cdot B} = \overline{A} \overset{\wedge}{+} \overline{B}$. Ta có

$$\begin{aligned} (1 - a) + (1 - b) - (1 - a)(1 - b) &= 1 - a + 1 - b - 1 + a + b - ab \\ &= 1 - ab. \end{aligned}$$

Điều này có nghĩa $\overline{A} \overset{\wedge}{+} \overline{B} = \overline{A \cdot B}$.

Chứng minh tương tự cho $A \overset{\wedge}{+} B = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}}$.

Các tính chất còn lại (1) và (3)-(5) chứng minh tương tự. $\square$

Lưu ý 1.1. (1) Tính phân phối của tích đại số đối với tổng đại số trên các tập mờ không đúng:

$$A \cdot (\overline{B} \overset{\wedge}{+} \overline{C}) \neq (A \cdot B) \overset{\wedge}{+} (A \cdot C).$$

(2) Trên các tập mờ, phép hợp và giao không phân phối đối với phép tích đại số hoặc tổng đại số:

$$\begin{aligned} A \cup (\overline{B} \cdot \overline{C}) &\neq (A \cup B) \cdot (A \cup C) \\ A \cap (\overline{B} \cdot \overline{C}) &\neq (A \cap B) \cdot (A \cap C) \\ A \cup (\overline{B} \overset{\wedge}{+} \overline{C}) &\neq (A \cup B) \overset{\wedge}{+} (A \cup C) \\ A \cap (\overline{B} \overset{\wedge}{+} \overline{C}) &\neq (A \cap B) \overset{\wedge}{+} (A \cap C). \end{aligned}$$

Đối phép toán tích đại số chúng ta cũng có khái niệm chỉ số mờ [7].

1.2.9 Định lý tách

Một tập mờ có thể biểu diễn qua các tập rõ bởi hệ số α_i .

Định lý 1.7 (Định lý tách). *Tập mờ A trên U có thể phân tích qua các hệ số α_i như sau:*

$$A = \max[\alpha_1 A_{\alpha_1}, \alpha_2 A_{\alpha_2}, \dots, \alpha_n A_{\alpha_n}], \quad 0 < \alpha_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

ở đây tích $\alpha_i A_{\alpha_i}$ là tập con (mờ) của U xác định bởi:

$$\mu_{\alpha_i A_{\alpha_i}}(x) = \begin{cases} \alpha_i & \text{nếu } \mu_A(x) \geq \alpha_i \\ 0 & \text{ngược lại.} \end{cases}$$

Chứng minh. Ta biết A_{α_i} là lát cắt α_i của tập mờ A với hàm thuộc xác định bởi:

$$\mu_{A_{\alpha_i}} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } \mu_A(x) \geq \alpha_i \\ 0 & \text{ngược lại.} \end{cases}$$

Do đó hàm thuộc của A có thể viết lại:

$$\begin{aligned} \mu_{\max_{\alpha_i} [\alpha_i A_{\alpha_i}]} &= \max_{\alpha_i} [\alpha_i A_{\alpha_i}] \\ &= \max_{\alpha_i \leq \mu_A(x)} [\alpha_i] \\ &= \mu_A(x). \end{aligned}$$

Theo định nghĩa bằng nhau của tập mờ suy ra

$$A = \max[\alpha_1 A_{\alpha_1}, \alpha_2 A_{\alpha_2}, \dots, \alpha_n A_{\alpha_n}].$$

□

Ví dụ 1.8. Xét tập $A = \{(x_1, 0.2), (x_2, 0), (x_3, 0.5), (x_4, 1), (x_5, 0.7)\}$ là tập mờ trong một tập vũ trụ hữu hạn U nào đó. Khi đó ta có

$$A = \max((0.2)\{(x_1, 1), (x_2, 0), (x_3, 1), (x_4, 1), (x_5, 1)\}, (0.5)\{(x_1, 0), (x_2, 0), (x_3, 1), (x_4, 1), (x_5, 1)\}, (0.7)\{(x_1, 0), (x_2, 0), (x_3, 0), (x_4, 1), (x_5, 1)\}, (1)\{(x_1, 1), (x_2, 0), (x_3, 1), (x_4, 1), (x_5, 1)\}).$$

Định lý tách vẫn còn đúng khi tập vũ trụ U có lực lượng continuum.

Ví dụ 1.9. Xét tập mờ A trên $\mathbb{R}^+$ với hàm thuộc xác định bởi:

$$\mu_A(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Xét đoạn $[\alpha, 1]$, với $0 < \alpha \leq 1$, ta có thể viết

$$\mu_{A_\alpha}(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } \mu_A(x) \in [\alpha, 1] \\ 0 & \text{ngược lại.} \end{cases}$$

Suy ra

$$\mu_{A_\alpha}(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \geq \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \\ 0 & \text{ngược lại.} \end{cases}$$

Do đó với tập giá trị α bất kỳ, $0 < \alpha \leq 1$, chúng ta có thể tách tập mờ A trên.

1.2.10 Khoảng cách

1.2.10.1 Khoảng cách Hamming

Đầu tiên chúng ta nhắc lại khái niệm khoảng cách. Cho X là tập hợp khác rỗng và $*$ là một phép toán trên tập số thực $\mathbb{R}$. Một *khoảng cách* (hay *mêtric*) trên X đối với phép toán $*$ là một ánh xạ $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn: $\forall x, y, z \in X$

(i) (*Tính không âm*) $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(ii) (*Tính đối xứng*) $d(x, y) = d(y, x)$

(iii) (*Bất đẳng thức tam giác*) $d(x, z) \leq d(x, y) * d(y, z)$.

Bây giờ ta xét tập hữu hạn $U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ và ánh xạ

$$d : \mathcal{F}(U) \times \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathbb{R}$$

xác định bởi

$$d(A, B) = \sum_{i=1}^n |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|$$

với $A, B \in \mathcal{F}(U)$.

Khi đó với mọi $A, B, C \in \mathcal{F}(U)$ ta có

$$(1) \ d(A, B) \geq 0, \ d(A, A) = 0$$

$$(2) \ d(A, B) = d(B, A)$$

$$(3) \ d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C).$$

Do đó d là một khoảng cách trên $\mathcal{F}(U)$ đối với phép cộng (+) trên $\mathbb{R}$. Khoảng cách này được gọi là *khoảng cách Hamming* (Hamming distance) trên các tập mờ trong U .

Dễ thấy $0 \leq d(A, B) \leq n$ với mọi $A, B \in \mathcal{F}(U)$. Đặt

$$\delta(A, B) = \frac{1}{n}d(A, B).$$

Rõ ràng $0 \leq \delta(A, B) \leq 1$ và δ cũng là một khoảng cách trên $\mathcal{F}(U)$ đối với phép cộng, và được gọi là *khoảng cách Hamming tương đối* (Relative Hamming distance) trên các tập mờ trong U .

Ví dụ 1.10. Xét hai tập mờ $A = \{(x_1, 0.7), (x_2, 0.2), (x_3, 0), (x_4, 0.6), (x_5, 0.5), (x_6, 1), (x_7, 0)\}$ và $B = \{(x_1, 0.2), (x_2, 0), (x_3, 0), (x_4, 0.6), (x_5, 0.8), (x_6, 0.4), (x_7, 1)\}$ trên tập vũ trụ $U = \{x_1, x_2, \dots, x_7\}$.

Ta có $d(A, B) = 2.6$ và $\delta(A, B) = \frac{1}{7}d(A, B) = 0.37$.

Trường hợp nếu U là tập vô hạn đếm được, $U = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, thì khoảng cách Hamming trên $\mathcal{F}(U)$ được định nghĩa là

$$d(A, B) = \sum_{i=1}^{\infty} |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|$$

nếu chuỗi này là hội tụ. Còn nếu $U = \mathbb{R}$ thì khoảng cách Hamming trên $\mathcal{F}(U)$ được định nghĩa là

$$d(A, B) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mu_A(x) - \mu_B(x)|.dx$$

nếu tích phân này hội tụ.

1.2.10.2 Khoảng cách Euclide

Chúng ta có kết quả quen thuộc sau.

Định lý 1.8. Cho $p_i, m_i, n_i \in \mathbb{R}^+$ với $i = 1, 2, \dots, k$. Nếu $p_i \leq m_i + n_i$ với mọi $i = 1, 2, \dots, k$ thì

$$\sqrt{\sum_{i=1}^k p_i^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^k m_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^k n_i^2}.$$

Chứng minh. Vì $p_i \leq m_i + n_i$ với mọi $i = 1, 2, \dots, k$ nên

$$\sqrt{\sum_{i=1}^k p_i^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^k (m_i + n_i)^2}.$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt{\sum_{i=1}^k (m_i + n_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^k m_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^k n_i^2}$$

là xong. Bất đẳng thức này tương đương với các bất đẳng thức sau:

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^k (m_i + n_i)^2 \leq \sum_{i=1}^k m_i^2 + \sum_{i=1}^k n_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^k m_i^2 \cdot \sum_{i=1}^k n_i^2} \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^k m_i n_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^k m_i^2 \cdot \sum_{i=1}^k n_i^2} \\ &\Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^k m_i n_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^k m_i^2 \cdot \sum_{i=1}^k n_i^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \sum_{i=1}^k (m_i n_i)^2 + 2 \sum_{i \neq j; i, j=1}^k m_i n_i \cdot m_j n_j \leq \sum_{i=1}^k m_i^2 \cdot n_i^2 + \sum_{i \neq j; i, j=1}^k (m_i^2 n_j^2 + m_j^2 n_i^2) \\
&\Leftrightarrow 2 \sum_{i \neq j; i, j=1}^k m_i n_i \cdot m_j n_j \leq \sum_{i \neq j; i, j=1}^k (m_i^2 n_j^2 + m_j^2 n_i^2) \\
&\Leftrightarrow \sum_{i \neq j; i, j=1}^k (m_i n_j - m_j n_i)^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng là hiển nhiên đúng. Như vậy chúng ta có

$$\sqrt{\sum_{i=1}^k p_i^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^k m_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^k n_i^2}.$$

□

Bây giờ xét tập hữu hạn $U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ và các tập mờ $A, B, C \in \mathcal{F}(U)$. Với $x_i \in U$, đặt

$$p_i = |\mu_A(x_i) - \mu_C(x_i)|, m_i = |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|, n_i = |\mu_B(x_i) - \mu_C(x_i)|.$$

Rõ ràng ta có $p_i \leq m_i + n_i$. Do đó theo Định lý 1.8 suy ra

$$\begin{aligned}
\sqrt{\sum_{i=1}^n |\mu_A(x_i) - \mu_C(x_i)|^2} &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|^2} + \\
&\quad \sqrt{\sum_{i=1}^n |\mu_B(x_i) - \mu_C(x_i)|^2}.
\end{aligned}$$

Đặt $e(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|^2}$. Dễ thấy

$$e(A, C) \leq e(A, B) + e(B, C).$$

Hơn nữa rõ ràng hàm e thỏa thêm tính không âm và tính đối xứng. Do đó e là một khoảng cách trên các tập mờ trong U đối với phép toán cộng trên $\mathbb{R}$ và được gọi là *khoảng cách Euclide*. Dễ thấy $0 \leq e(A, B) \leq \sqrt{n}$, và

khi đó $e^2(A, B) = \sum_{i=1}^n |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|^2$ được gọi là *chuẩn Euclide*.

Đặt $\epsilon(A, B) = \frac{1}{\sqrt{n}}e(A, B) = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|^2}$. Rõ ràng $0 \leq \epsilon(A, B) \leq 1$ và ϵ cũng là một khoảng cách trên các tập mờ trong U và được gọi là *khoảng cách Euclide tương đối*. Khi đó $\epsilon^2(A, B) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|^2$ được gọi là *chuẩn Euclide tương đối*.

Xét Ví dụ 1.10 ta có $e^2(A, B) = 1.74$, $e(A, B) = \sqrt{1.74} = 1.32$ và $\epsilon(A, B) = \frac{e(A, B)}{\sqrt{7}} = 0.49$.

Trường hợp nếu U là tập vô hạn đếm được, $U = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, thì khoảng cách Euclide trên $\mathcal{F}(U)$ được định nghĩa là

$$e(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|^2}$$

nếu chuỗi này là hội tụ. Còn nếu $U = \mathbb{R}$ thì khoảng cách Euclide trên $\mathcal{F}(U)$ được định nghĩa là

$$e(A, B) = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |\mu_A(x) - \mu_B(x)|^2 dx}$$

nếu tích phân này hội tụ.

Lưu ý 1.2. Khoảng cách Euclide tương đối và khoảng cách Hamming tương đối không được sử dụng trong trường hợp U là tập vô hạn (đếm được hoặc không đếm được).

1.2.10.3 Chỉ số mờ

Xét tập vũ trụ U hữu hạn và tập mờ $A \in \mathcal{F}(U)$. Tập rõ gần với A nhất, ký hiệu $\underline{A}$, là một tập con của U có hàm đặc trưng xác định bởi:

$$\mu_{\underline{A}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } \mu_A(x) < 0.5 \\ 1 & \text{nếu } \mu_A(x) > 0.5 \\ 0 \text{ hoặc } 1 & \text{nếu } \mu_A(x) = 0.5 \end{cases}$$

Ở đây chúng ta quy ước $\mu_{\underline{A}}(x) = 1$ nếu $\mu_A(x) = 0.5$. Như vậy

$$\mu_{\underline{A}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } \mu_A(x) < 0.5 \\ 1 & \text{nếu } \mu_A(x) \geq 0.5 \end{cases}$$

Ví dụ 1.11. Xét tập mờ trên tập vũ trụ $U = \{x_1, x_2, \dots, x_5\}$ như sau:

$$A = \{(x_1, 0.4), (x_2, 0.6), (x_3, 0.5), (x_4, 1), (x_5, 0)\}.$$

Khi đó tập rõ gần với A nhất là:

$$\underline{A} = \{(x_1, 0), (x_2, 1), (x_3, 1), (x_4, 1), (x_5, 0)\}.$$

Hay viết lại

$$\underline{A} = \{x_2, x_3, x_4\}.$$

Chỉ số mờ tuyến tính (Linear index of fuzziness) của tập mờ A , ký hiệu $\gamma(A)$, là số thực xác định bởi

$$\gamma(A) = \frac{2}{n} \cdot d(A, \underline{A}).$$

Trường hợp số thực được xác định như sau

$$\frac{2}{\sqrt{n}} \cdot e(A, \underline{A})$$

được gọi là *chỉ số mờ bậc hai* (Quadratic index of fuzziness) của tập mờ A và ký hiệu là $\eta(A)$.

Như vậy

$$\eta(A) = \frac{2}{\sqrt{n}} \cdot e(A, \underline{A}).$$

Vì

$$0 \leq \delta(A, \underline{A}) \leq \frac{1}{2} \text{ và } 0 \leq \epsilon(A, \underline{A}) \leq \frac{1}{2}$$

nên

$$0 \leq \gamma(A) \leq 1 \text{ và } 0 \leq \eta(A) \leq 1.$$

Khái niệm tập rõ gần với một tập mờ cho trước và khái niệm chỉ số mờ cũng được mở rộng cho tập vũ trụ U là vô hạn, tuy nhiên với điều kiện tổng

là hữu hạn. Chẳng hạn với $U = [a, b] \in \mathbb{R}$ thì chỉ số mờ tuyến tính xác định bởi:

$$\gamma(A) = \frac{2}{b-a} \int_a^b | \mu_A(x) - \mu_{\underline{A}}(x) | dx.$$

Ví dụ 1.12. Cho A là một tập mờ trên $U = [0, 2]$ với hàm thuộc xác định:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ (x-2)^2 & \text{khi } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Khi đó ta có

$$\gamma(A) = \frac{2}{2-0} \int_0^2 | \mu_A(x) - \mu_{\underline{A}}(x) | dx.$$

Ta thấy

$$x^2 \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

và

$$\begin{aligned} (x-2)^2 \geq \frac{1}{2} &\Leftrightarrow 2-x \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &\Leftrightarrow x \leq 2 - \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \gamma(A) &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^2 dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 (1-x^2) dx + \int_1^{2-\frac{1}{\sqrt{2}}} (1-(x-2)^2) dx + \\ &\quad + \int_{2-\frac{1}{\sqrt{2}}}^2 (x-2)^2 dx \\ &= \frac{4}{3} - \frac{4}{3\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Vậy chỉ số mờ tuyến tính của tập mờ A là $(\frac{4}{3} - \frac{4}{3\sqrt{2}})$.

Ví dụ 1.13. Cho $U = [0, a]$ ($a > 0$) và A là một tập con mờ của U xác định

bởi $\mu_A(x) = \frac{x^2}{a}$. Tìm chỉ số mờ tuyến tính $\gamma(A)$.

(Bài tập về nhà)

Các tập rõ gần nhất với tập mờ có các tính chất cơ bản sau.

Mệnh đề 1.9. Cho các tập mờ $A, B \in \mathcal{F}(U)$. Khi đó

$$(1) \underline{A \cap B} = \underline{A} \cap \underline{B}$$

$$(2) \underline{A \cup B} = \underline{A} \cup \underline{B}.$$

Chứng minh.

(1) Ta có

$$\begin{aligned} \mu_{\underline{A \cap B}}(x) &= \begin{cases} 0 & \text{nếu } \mu_{A \cap B}(x) < 0.5 \\ 1 & \text{ngược lại} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{nếu } \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) < 0.5 \\ 1 & \text{ngược lại} \end{cases} \\ &= \min(\mu_{\underline{A}}(x), \mu_{\underline{B}}(x)) \\ &= \mu_{\underline{A} \cap \underline{B}}(x). \end{aligned}$$

(2) Lập luận tương tự ta cũng có

$$\begin{aligned} \mu_{\underline{A \cup B}}(x) &= \begin{cases} 0 & \text{nếu } \mu_{A \cup B}(x) < 0.5 \\ 1 & \text{ngược lại} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{nếu } \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) < 0.5 \\ 1 & \text{ngược lại} \end{cases} \\ &= \max(\mu_{\underline{A}}(x), \mu_{\underline{B}}(x)) \\ &= \mu_{\underline{A} \cup \underline{B}}(x). \end{aligned}$$

□

1.2.10.4 Đánh giá chỉ số mờ qua entropy

Ở đây chúng ta chỉ xét tập vũ trụ U là hữu hạn.

Như chúng ta đã biết entropy của một hệ đo mức độ hỗn loạn (mất trật tự) của các thành phần trong hệ đó ứng với xác suất của trạng thái. Một cách hình thức entropy được định nghĩa như sau.

Xét một hệ gồm N trạng thái $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_N$ với các xác suất tương ứng $p_1, p_2, \dots, p_N$. Khi đó *entropy* của của hệ, ký hiệu $H(p_1, p_2, \dots, p_N)$, là giá trị xác định bởi

$$H(p_1, p_2, \dots, p_N) = - \sum_{i=1}^N p_i \ln p_i.$$

Dễ dàng chứng minh được

- $H = 0$ (H cực tiểu) khi

$$\begin{cases} p_r = 1, & r \in \{1, 2, \dots, N\} \\ p_i = 0, & i \neq r \end{cases}$$

- $H = \ln N$ (H cực đại) khi

$$p_1 = p_2 = \dots = p_N = p = \frac{1}{N}.$$

Trường hợp nếu chúng ta xác định

$$H(p_1, p_2, \dots, p_N) = - \frac{1}{\ln N} \sum_{i=1}^N p_i \ln p_i$$

thì khi đó *entropy* là một giá trị (quantity) biến thiên giữa 0 và 1:

$$H_{min} = 0 \quad \text{và} \quad H_{max} = 1.$$

Bây giờ chúng ta dùng khái niệm này để ước lượng (evaluate) độ mờ của một tập con. Xét tập con mờ A như sau:

$$\mu_A(x_1) = 0.7, \mu_A(x_2) = 0.9, \mu_A(x_3) = 0, \mu_A(x_4) = 0.6, \mu_A(x_5) = 0.5, \mu_A(x_6) = 1.$$

Đặt

$$\pi_A(x_i) = \frac{\mu_A(x_i)}{\sum_{i=1}^6 \mu_A(x_i)}$$

ta thu được

$$\pi_A(x_1) = \frac{7}{37}, \pi_A(x_2) = \frac{9}{37}, \pi_A(x_3) = 0, \pi_A(x_4) = \frac{6}{37}, \pi_A(x_5) = \frac{5}{37}, \pi_A(x_6) = \frac{10}{37}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} H(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_6) &= -\frac{1}{\ln 6} \sum_{i=1}^6 \pi_A(x_i) \cdot \ln \pi_A(x_i) \\ &= 0.89. \end{aligned}$$

Công thức tổng quát cho phép tính toán entropy từ độ mờ có thể viết lại như sau:

$$\begin{aligned} H(\pi_A(x_1), \pi_A(x_2), \dots, \pi_A(x_n)) &= -\frac{1}{\ln N} \sum_{i=1}^N \pi_A(x_i) \cdot \ln \pi_A(x_i) \\ &= \frac{1}{\ln N \cdot \sum_{i=1}^N \mu_A(x_i)} \left[\left(\sum_{i=1}^N \mu_A(x_i) \right) \times \right. \\ &\quad \left. \left(\ln \sum_{i=1}^N \mu_A(x_i) \right) - \left(\sum_{i=1}^N \mu_A(x_i) \times \ln \mu_A(x_i) \right) \right]. \end{aligned}$$

...

1.3 Đại số tập mờ

Lý thuyết tập mờ là cơ sở toán học cho việc phát triển các phương pháp mô phỏng lập luận của con người. Về nguyên tắc vấn đề tư duy và lập luận của con người là cực kỳ phức tạp, do đó khó có thể xây dựng được một cấu trúc toán học duy nhất để mô phỏng. Vì vậy nếu chúng ta xây dựng được càng nhiều cấu trúc đại số các tập mờ thì càng tốt, để từ đó chúng ta có thể linh hoạt trong tiếp cận các vấn đề ứng dụng.

1.3.1 Phép t -chuẩn

Một hàm hai biến $T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ được gọi là một phép t -chuẩn (t -norm) nếu nó thỏa mãn các tính chất sau: $\forall a, a', b, b', c \in [0, 1]$

$$(T_1) \text{ Điều kiện biên: } T(a, 0) = 0, T(a, 1) = a$$

$$(T_2) \text{ Tính giao hoán: } T(a, b) = T(b, a)$$

$$(T_3) \text{ Tính đơn điệu: } (a \leq a', b \leq b') \Rightarrow T(a, b) \leq T(a', b')$$

$$(T_4) \text{ Tính kết hợp: } T(T(a, b), c) = T(a, T(b, c)).$$

Dễ kiểm chứng được các phép toán giao ($\wedge$) và tích đại số ($\cdot$) trên các tập mờ là các phép t -chuẩn. Khi đó chúng còn được ký hiệu lại tương ứng là T_m và T_p . Phép toán T_m còn được gọi là *phép giao mờ chuẩn* (Fuzzy standard intersection).

Trường hợp phép t -chuẩn T thỏa điều kiện $T(a, a) = a$ với mọi $a \in [0, 1]$ thì phép t -chuẩn T được gọi là có *tính lũy đẳng*. Khi đó phép giao mờ chuẩn T_m có tính chất thú vị sau.

Mệnh đề 1.10. *Phép giao mờ chuẩn T_m là phép t -chuẩn duy nhất có tính lũy đẳng.*

Chứng minh. Rõ ràng $T_m(a, a) = \min(a, a) = a$ với mọi $a \in [0, 1]$. Tức là T_m có tính lũy đẳng.

Giả sử T là một phép t -chuẩn bất kỳ có tính lũy đẳng. Với mọi $a, b \in [0, 1]$, không mất tính tổng quát ta xem $a \leq b$. Khi đó theo định nghĩa phép t -chuẩn và tính lũy đẳng ta có

$$a = T(a, a) \leq T(a, b) \leq T(a, 1) = a.$$

Suy ra $T(a, b) = a = \min(a, b)$. Như vậy $T = T_m$. □

Mệnh đề 1.10 cho thấy lý do vì sao người ta không xem tính lũy đẳng là tiên đề của phép t -chuẩn.

Ví dụ 1.14. Các phép t -chuẩn sau thường được sử dụng:

(1) *Giao mờ chuẩn:* $T_m(a, b) = \min(a, b)$

(2) Một số phép toán giao khác:

a) *Tích đại số:* $T_p(a, b) = a \cdot b$

b) *Tích giới nội* (Bounded product): $T_L(a, b) = \max(0, a + b - 1)$

c) *Tích chặt* (Drastic product):

$$T^*(a, b) = \begin{cases} a & \text{khi } b = 1 \\ b & \text{khi } a = 1 \\ 0 & \text{khi } a < 1 \text{ và } b < 1 \end{cases}$$

Ta có dãy bất đẳng thức sau:

$$T^* \leq T_L \leq T_p \leq T_m$$

và với mọi t -chuẩn T ta luôn có:

$$T^* \leq T \leq T_m.$$

Về mặt ngữ nghĩa phép t -chuẩn được sử dụng để mở rộng ngữ nghĩa của phép toán logic AND .

1.3.2 Phép t -đối chuẩn

Một hàm hai biến $S : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ được gọi là một phép t -đối chuẩn (t -conorm) hay S -chuẩn nếu nó thỏa mãn các tính chất sau: $\forall a, a', b, b', c \in [0, 1]$

$$(S_1) \text{ Điều kiện biên: } S(a, 0) = a, S(a, 1) = 1$$

$$(S_2) \text{ Tính giao hoán: } S(a, b) = S(b, a)$$

$$(S_3) \text{ Tính đơn điệu: } (a \leq a', b \leq b') \Rightarrow S(a, b) \leq S(a', b')$$

$$(S_4) \text{ Tính kết hợp: } S(S(a, b), c) = S(a, S(b, c)).$$

Dễ kiểm chứng được các phép toán hợp ($\vee$) và tổng đại số ($\hat{+}$) trên các tập mờ là các phép t -đối chuẩn. Đây là phép toán đối ngẫu với phép toán t -chuẩn, chúng còn được ký hiệu lại tương ứng là S_m và S_p . Phép hợp mờ S_m còn được gọi là *hợp mờ chuẩn*.

Ví dụ 1.15. Các phép t -đối chuẩn sau thường được sử dụng:

$$(1) \text{ Hợp mờ chuẩn: } S_m(a, b) = \max(a, b)$$

(2) Một số phép hợp khác:

$$a) \text{ Tổng đại số: } S_p(a, b) = a + b - ab$$

$$b) \text{ Tổng giới nội: } S_L(a, b) = \min(1, a + b)$$

c) *Tổng chặt:*

$$S^*(a, b) = \begin{cases} a & \text{khi } b = 0 \\ b & \text{khi } a = 0 \\ 1 & \text{khi } a > 0 \text{ và } b > 0 \end{cases}$$

Ta có dãy bất đẳng thức sau:

$$S_m \leq S_p \leq S_L \leq S^*$$

và với mọi t -đối chuẩn S ta luôn có:

$$S_m \leq S \leq S^*.$$

Tương tự như Mệnh đề 1.10, phép hợp mờ chuẩn S_m cũng có tính chất sau.

Mệnh đề 1.11. *Phép hợp mờ chuẩn S_m là phép t -đối chuẩn duy nhất có tính lũy đẳng.*

Chứng minh. Rõ ràng $S_m(a, a) = \max(a, a) = a$ với mọi $a \in [0, 1]$. Hay S_m có tính lũy đẳng.

Giả sử S là một phép t -đối chuẩn tùy ý có tính lũy đẳng. Khi đó với mọi $a, b \in [0, 1]$, $a \leq b$, ta có

$$b = S(b, 0) = S(0, b) \leq S(a, b) \leq S(b, b) = b.$$

Suy ra $S(a, b) = b = \max(a, b)$. Như vậy $S = S_m$. □

Về mặt ngữ nghĩa phép t -đối chuẩn được sử dụng để mở rộng ngữ nghĩa của phép toán logic *OR*.

1.3.3 Phép phủ định

Hàm $N : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ được gọi là phép *phủ định* nếu nó thỏa mãn các tính chất sau: $\forall a, a' \in [0, 1]$

(N_1) *Tính đơn điệu giảm:* $a \leq a' \Rightarrow N(a) \geq N(a')$

(N_2) *Tính bù kép:* $N(N(a)) = a$.

Mệnh đề 1.12. *Phép phủ định là một song ánh.*

Chứng minh. Giả sử hàm $N : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ là một phép phủ định. Khi đó

$$\begin{aligned} \forall a, a' \in [0, 1], N(a) = N(a') &\Rightarrow N(N(a)) = N(N(a')) \\ &\Rightarrow a = a'. \end{aligned}$$

Do đó N là một đơn ánh.

Ngoài ra với mọi $b \in [0, 1]$, đặt $a = N(b)$. Suy ra $N(a) = N(N(b)) = b$. Điều này có nghĩa N là một toàn ánh. Như vậy N là một song ánh. $\square$

1.3.4 Hệ đối ngẫu

Định nghĩa 1.1. Ba phép toán t -chuẩn T , t -đối chuẩn S và phép phủ định N được gọi là một *hệ đối ngẫu* $\Delta = (T, S, N)$ nếu chúng thỏa mãn điều kiện sau:

$$\forall a, b \in [0, 1], N(S(a, b)) = T(N(a), N(b)) \quad (1.3.1)$$

Điều kiện (1.3.1) còn viết lại là $N(T(a, b)) = S(N(a), N(b))$.

Dễ dàng kiểm chứng được các hệ sau đây là hệ đối ngẫu mà ta thường gọi là hệ luật DeMorgan: $(\wedge, \vee, -)$, $(\cdot, \overset{\wedge}{+}, -)$, $(T_L, S_L, -)$, $(T^*, S^*, -)$.

1.3.5 Đại số tập mờ

Cho một hệ đối ngẫu bất kỳ $\Delta = (T, S, N)$ và một tập hợp U . *Đại số tập mờ* trên $\mathcal{F}(U)$ dựa trên hệ đối ngẫu Δ là một cấu trúc $FA_\Delta = (\mathcal{F}(U), \cap_\Delta, \cup_\Delta, {}^{-\Delta})$ với các phép toán được định nghĩa như sau: $\forall A, B \in \mathcal{F}(U)$

(i) *Phép giao* $\cap_\Delta$:

$$A \cap_\Delta B \in \mathcal{F}(U) \text{ xác định bởi } \mu_{A \cap_\Delta B}(x) = T(\mu_A(x), \mu_B(x)).$$

(ii) *Phép hợp* $\cup_\Delta$:

$$A \cup_\Delta B \in \mathcal{F}(U) \text{ xác định bởi } \mu_{A \cup_\Delta B}(x) = S(\mu_A(x), \mu_B(x)).$$

(iii) *Phép lấy bù* ${}^{-\Delta}$:

$$\overline{A}_\Delta \text{ xác định bởi } \mu_{\overline{A}_\Delta}(x) = N(\mu_A(x)).$$

Đại số tập mờ có các tính chất cơ bản sau.

Mệnh đề 1.13. *Với mọi $A, B, C \in \mathcal{F}(U)$ ta có:*

- (1) *Tính đồng nhất:* $A \cap_{\Delta} U = A, A \cup_{\Delta} \emptyset = A$
(2) *Tính nuốt:* $A \cap_{\Delta} \emptyset = \emptyset, A \cup_{\Delta} U = U$
(3) *Tính giao hoán:* $A \cap_{\Delta} B = B \cap_{\Delta} A, A \cup_{\Delta} B = B \cup_{\Delta} A$
(4) *Tính kết hợp:* $(A \cap_{\Delta} B) \cap_{\Delta} C = A \cap_{\Delta} (B \cap_{\Delta} C),$
 $(A \cup_{\Delta} B) \cup_{\Delta} C = A \cup_{\Delta} (B \cup_{\Delta} C)$
(5) *Tính phân phối:* $A \cap_{\Delta} (B \cup_{\Delta} C) = (A \cap_{\Delta} B) \cup_{\Delta} (A \cap_{\Delta} C),$
 $A \cup_{\Delta} (B \cap_{\Delta} C) = (A \cup_{\Delta} B) \cap_{\Delta} (A \cup_{\Delta} C)$
(6) *Tính bù kép:* $\overline{\overline{A}}_{\Delta} = A$
(7) *Luật De Morgan:* $\overline{A \cap_{\Delta} B} = \overline{A}_{\Delta} \cup_{\Delta} \overline{B}_{\Delta}, \overline{A \cup_{\Delta} B} = \overline{A}_{\Delta} \cap_{\Delta} \overline{B}_{\Delta}.$

Chứng minh.

- (1) Theo định nghĩa phép giao $\cap_{\Delta}$ ta có

$$\begin{aligned}\mu_{A \cap_{\Delta} U}(x) &= T(\mu_A(x), \mu_U(x)) \\ &= T(\mu_A(x), 1) \\ &= \mu_A(x).\end{aligned}$$

Suy ra $A \cap_{\Delta} U = A$.

Lập luận tương tự, theo phép toán hợp $\cup_{\Delta}$ ta cũng có

$$\begin{aligned}\mu_{A \cup_{\Delta} \emptyset}(x) &= S(\mu_A(x), \mu_{\emptyset}(x)) \\ &= S(\mu_A(x), 0) \\ &= \mu_A(x).\end{aligned}$$

Do đó $A \cup_{\Delta} \emptyset = A$.

Các tính chất từ (2)-(7) chứng minh hoàn toàn tương tự. □

Bài tập

Câu 1.1. Chứng minh các tính chất của tổng đại số và tích đại số từ (1), (3)-(5) trong Mệnh đề 1.6.

Câu 1.2. Chứng minh các tích đại số T_P , tích giới nội T_L và tích chặt T^* là các phép t -chuẩn.

Câu 1.3. Chứng minh dãy bất đẳng thức sau cho các phép t -chuẩn

$$T^* \leq T_L \leq T_P \leq T_m.$$

Chứng minh với phép t -chuẩn T bất kỳ, chúng ta luôn có bất đẳng thức sau:

$$T^* \leq T \leq T_m.$$

Câu 1.4. Chứng minh các tổng đại số S_P , tổng giới nội S_L và tổng chặt S là các phép t -đối chuẩn.

Câu 1.5. Chứng minh dãy bất đẳng thức sau cho các phép t -đối chuẩn:

$$S_m \leq S_P \leq S_L \leq S^*.$$

Chứng minh với phép t -đối chuẩn S bất kỳ, chúng ta luôn có bất đẳng thức sau:

$$S_m \leq S \leq S^*.$$

Câu 1.6. Chứng minh các hệ sau đây là hệ đối ngẫu:

a) $\Delta = (\wedge, \vee, -)$

b) $\Delta = (\cdot, \overset{\wedge}{+}, -)$

c) $\Delta = (T_L, S_L, -)$

d) $\Delta = (T^*, S^*, -).$

Câu 1.7. Chứng minh các tính chất của đại số tập mờ từ (2)-(7) trong Mệnh đề 1.13.

Chương 2

Quan hệ mờ

Quan hệ mờ là một trong những khái niệm quan trọng của lý thuyết tập mờ, đóng vai trò quan trọng trong logic mờ. Khái niệm quan hệ mờ là sự tổng quát hóa của khái niệm quan hệ thông thường (rõ), chúng làm rõ những mối liên kết không chính xác hay có cấp độ giữa các phần tử của cùng một tập hợp.

2.1 Định nghĩa

Cho U và V là hai tập hợp bất kỳ. Xét tích Descartes $U \times V$. Mỗi tập mờ R trên tập $U \times V$ được gọi là một *quan hệ mờ* từ U đến V . Trường hợp nếu $U = V$ thì R được gọi là *quan hệ mờ trên U* . Như vậy khi R là một quan hệ mờ từ U đến V thì có nghĩa $R \in \mathcal{F}(U \times V)$ và R là một quan hệ mờ trên U thì có nghĩa $R \in \mathcal{F}(U^2)$.

Tổng quát một quan hệ mờ giữa các tập hợp bất kỳ $U_1, U_2, \dots, U_n$ là một tập mờ trên tích Descartes $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$.

Khi U và V là hai tập hữu hạn thì quan hệ mờ R từ U đến V có thể biểu diễn bằng ma trận $M(R)$ trong đó các dòng tương ứng với các phần tử $x \in U$, các cột tương ứng với các phần tử $y \in V$ và phần tử của ma trận nằm ở dòng x cột y là giá trị $\mu_R(x, y)$. Đặc biệt khi $U = V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ (hữu hạn) thì quan hệ mờ R trên U có thể biểu diễn bằng một đồ thị có hướng có trọng số sao cho tập đỉnh là U , còn nếu $\mu_R(x_i, x_j) > 0$ thì có một cung từ đỉnh x_i đến đỉnh x_j với trọng số là $\mu_R(x_i, x_j)$. Đồ thị này còn được gọi là *đồ thị mờ* xác định bởi R .

Ví dụ 2.1. Cho $U = \mathbb{R}$ và tập mờ $R \in \mathcal{F}(U^2)$ xác định bởi:

$$\mu_R(x, y) = e^{-(x-y)^2}.$$

Khi đó R là một quan hệ mờ trên U .

Ví dụ 2.2. Cho $U = \{x_1, x_2, \dots, x_4\}$, $V = \{y_1, y_2, y_3\}$ và quan hệ mờ $R \in$

$\mathcal{F}(U \times V)$ như sau:

$$R = \frac{0}{(x_1, y_1)} + \frac{0.5}{(x_1, y_2)} + \frac{1}{(x_1, y_3)} + \frac{1}{(x_2, y_1)} + \frac{0}{(x_2, y_2)} + \frac{0}{(x_2, y_3)} + \frac{0.2}{(x_3, y_1)} + \frac{0}{(x_3, y_2)} + \frac{0}{(x_3, y_3)} + \frac{1}{(x_4, y_1)} + \frac{0.5}{(x_4, y_2)} + \frac{0.8}{(x_4, y_3)}$$

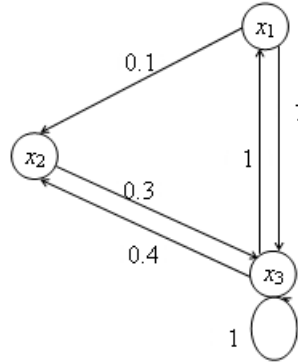
Khi đó quan hệ mờ R trên có thể biểu diễn bởi ma trận như sau:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.2 \\ 1 & 0.5 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ y_1 \quad y_2 \quad y_3 \end{matrix}$$

Ví dụ 2.3. Cho $U = \{x_1, x_2, x_3\}$ và quan hệ mờ $R \in \mathcal{F}(U^2)$ như sau:

$$R = \frac{0}{(x_1, x_1)} + \frac{0.1}{(x_1, x_2)} + \frac{1}{(x_1, x_3)} + \frac{0}{(x_2, x_1)} + \frac{0}{(x_2, x_2)} + \frac{0.3}{(x_2, x_3)} + \frac{1}{(x_3, x_1)} + \frac{0.4}{(x_3, x_2)} + \frac{1}{(x_3, x_3)}$$

Quan hệ mờ R trên có thể biểu diễn bằng đồ thị mờ sau đây:



Lưu ý 2.1. Rõ ràng quan hệ mờ là những trường hợp riêng của các tập mờ. Do đó những khái niệm và tính chất liên quan đến các tập mờ đều có thể áp dụng được cho quan hệ mờ. Chẳng hạn có thể định nghĩa chiều cao, giá, ... của một quan hệ mờ [5].

Cho quan hệ mờ $R \in \mathcal{F}(U \times V)$, tập mờ $A \in \mathcal{F}(U)$ và tập mờ $B \in \mathcal{F}(V)$. Tập mờ cảm sinh từ A và R , ký hiệu $A \circ R$, là một tập mờ trên V với hàm

thuộc xác định bởi:

$$\mu_{A \circ R}(y) = \bigvee_{x \in U} [\mu_A(x) \wedge \mu_R(x, y)], \forall y \in V.$$

Trường hợp *tập mờ cảm sinh từ R và B*, ký hiệu $R \circ B$, là một tập mờ trên U với hàm thuộc cho bởi:

$$\mu_{R \circ B}(x) = \bigvee_{y \in V} [\mu_R(x, y) \wedge \mu_B(y)], \forall x \in U.$$

Ví dụ 2.4. Xét quan hệ mờ R từ tập $U = \{x_1, x_2\}$ đến tập $V = \{y_1, y_2, y_3\}$ như sau:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 1 \\ 0.2 & 1 & 0.3 \end{pmatrix}$$

và hai tập mờ trên U và V tương ứng là

$$A = \frac{0.1}{x_1} + \frac{0.8}{x_2}, B = \frac{0}{y_1} + \frac{0.1}{y_2} + \frac{0.4}{y_3}.$$

Ta có tập mờ trên V cảm sinh từ A và R là:

$$A \circ R = \frac{0.2}{y_1} + \frac{0.8}{y_2} + \frac{0.3}{y_3}$$

và tập mờ trên U cảm sinh từ R và B là:

$$R \circ B = \frac{0.4}{x_1} + \frac{0.3}{x_2}.$$

2.2 Các phép toán trên quan hệ mờ

2.2.1 Phép hợp thành min-max

Cho U, V, W là các tập hợp bất kỳ và hai quan hệ mờ $R \in \mathcal{F}(U \times V)$, $S \in \mathcal{F}(V \times W)$. *Hợp thành min-max* của R và S , ký hiệu $R \circ S$, là một quan hệ mờ từ U đến W với hàm thuộc xác định bởi:

$$\mu_{R \circ S}(x, w) = \bigvee_{y \in V} [\mu_R(x, y) \wedge \mu_S(y, w)], \forall x \in U, w \in W.$$

Ví dụ 2.5. Cho hai quan hệ mờ $R \in \mathcal{F}(U \times V)$ và $S \in \mathcal{F}(V \times W)$ như sau:

$$R = \begin{pmatrix} 0.3 & 1 & 0.7 & 0.1 & 0.4 \\ 0 & 0.5 & 0.8 & 0.2 & 0.3 \\ 0.7 & 0.8 & 0.2 & 0.4 & 0 \\ 0.9 & 0.7 & 0.8 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0.3 & 0.2 \\ 0.8 & 0.3 & 0.9 \\ 0.7 & 0.5 & 0 \\ 0.6 & 0.1 & 0.5 \\ 0.2 & 0.6 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Khi đó ta có:

$$R \circ S = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.5 & 0.9 \\ 0.7 & 0.5 & 0.5 \\ 0.8 & 0.3 & 0.8 \\ 0.9 & 0.5 & 0.7 \end{pmatrix}$$

Phép hợp thành min-max có một số tính chất cơ bản sau.

Mệnh đề 2.1.

- (1) *Phép hợp thành min-max có tính kết hợp.*
- (2) *Phép hợp thành min-max có tính phân phối với phép hợp.*

Chứng minh.

(1) Xét các quan hệ mờ $R \in \mathcal{F}(U \times V)$, $S \in \mathcal{F}(V \times W)$ và $T \in \mathcal{F}(W \times Z)$. Ta sẽ chứng minh $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$. Thật vậy với mọi $x \in U, z \in Z$ ta có:

$$\begin{aligned} \mu_{(R \circ S) \circ T}(x, z) &= \bigvee_{w \in W} [\mu_{R \circ S}(x, w) \wedge \mu_T(w, z)] \\ &= \bigvee_{w \in W} [\bigvee_{y \in V} [\mu_R(x, y) \wedge \mu_S(y, w)] \wedge \mu_T(w, z)] \\ &= \bigvee_{w \in W} \bigvee_{y \in V} [\mu_R(x, y) \wedge \mu_S(y, w) \wedge \mu_T(w, z)] \\ &= \bigvee_{y \in V} [\mu_R(x, y) \wedge \bigvee_{w \in W} [\mu_S(y, w) \wedge \mu_T(w, z)]] \\ &= \bigvee_{y \in V} [\mu_R(x, y) \wedge \mu_{S \circ T}(y, z)] \\ &= \mu_{R \circ (S \circ T)}(x, z). \end{aligned}$$

Như vậy $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$.

(2) Xét quan hệ mờ $R \in \mathcal{F}(U \times V)$ và hai quan hệ mờ $S_1, S_2 \in \mathcal{F}(V \times W)$. Ta sẽ chứng minh $R \circ (S_1 \cup S_2) = (R \circ S_1) \cup (R \circ S_2)$. Với mọi $x \in U, w \in W$

ta có

$$\begin{aligned}
\mu_{R \circ (S_1 \cup S_2)}(x, w) &= \bigvee_{y \in V} [\mu_R(x, y) \wedge (\mu_{S_1}(y, w) \vee \mu_{S_2}(y, w))] \\
&= \bigvee_{y \in V} [(\mu_R(x, y) \wedge \mu_{S_1}(y, w)) \vee (\mu_R(x, y) \wedge \mu_{S_2}(y, w))] \\
&= \bigvee_{y \in V} [\mu_R(x, y) \wedge \mu_{S_1}(y, w)] \vee \bigvee_{y \in V} [\mu_R(x, y) \wedge \mu_{S_2}(y, w)] \\
&= \mu_{R \circ S_1}(x, w) \vee \mu_{R \circ S_2}(x, w) \\
&= \mu_{(R \circ S_1) \cup (R \circ S_2)}(x, w).
\end{aligned}$$

Do đó $R \circ (S_1 \cup S_2) = (R \circ S_1) \cup (R \circ S_2)$. □

2.2.2 Phép hợp thành tích-max

Cho U, V, W là các tập hợp bất kỳ và hai quan hệ mờ $R \in \mathcal{F}(U \times V)$, $S \in \mathcal{F}(V \times W)$. *Hợp thành tích-max* của R và S , ký hiệu $R \bullet S$, là một quan hệ mờ từ U đến W với hàm thuộc xác định như sau:

$$\forall x \in U, \forall z \in W, \mu_{R \bullet S}(x, z) = \bigvee_{y \in V} [\mu_R(x, y) \cdot \mu_S(y, z)].$$

Ví dụ 2.6. Xét hai quan hệ mờ R và S ở Ví dụ 2.5.

Ta có

$$R \bullet S = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.35 & 0.9 \\ 0.56 & 0.4 & 0.45 \\ 0.7 & 0.21 & 0.72 \\ 0.9 & 0.4 & 0.63 \end{pmatrix}$$

Phép hợp thành tích-max cũng có các tính chất cơ bản tương tự phép hợp thành min-max như sau

Mệnh đề 2.2.

- (1) *Hợp thành tích-max có tính kết hợp.*
- (2) *Hợp thành tích-max có tính phân phối với phép hợp.*

Chứng minh.

(1) Xét các quan hệ mờ $R \in \mathcal{F}(U \times V)$, $S \in \mathcal{F}(V \times W)$ và $T \in \mathcal{F}(W \times Z)$. Ta sẽ chứng minh $(R \bullet S) \bullet T = R \bullet (S \bullet T)$. Với mọi $x \in U, z \in Z$ ta có:

$$\begin{aligned}
\mu_{(R \bullet S) \bullet T}(x, z) &= \bigvee_{w \in W} [\mu_{R \bullet S}(x, w) \cdot \mu_T(w, z)] \\
&= \bigvee_{w \in W} [\bigvee_{y \in V} [\mu_R(x, y) \cdot \mu_S(y, w)] \cdot \mu_T(w, z)] \\
&= \bigvee_{w \in W} \bigvee_{y \in V} [\mu_R(x, y) \cdot \mu_S(y, w) \cdot \mu_T(w, z)] \\
&= \bigvee_{y \in V} [\mu_R(x, y) \cdot \bigvee_{w \in W} [\mu_S(y, w) \cdot \mu_T(w, z)]] \\
&= \bigvee_{y \in V} [\mu_R(x, y) \cdot \mu_{S \bullet T}(y, z)] \\
&= \mu_{R \bullet (S \bullet T)}(x, z).
\end{aligned}$$

Suy ra $(R \bullet S) \bullet T = R \bullet (S \bullet T)$.

(2) Xét quan hệ mờ $R \in \mathcal{F}(U \times V)$ và hai quan hệ mờ $S_1, S_2 \in \mathcal{F}(V \times W)$. Ta sẽ chứng minh $R \bullet (S_1 \cup S_2) = (R \bullet S_1) \cup (R \bullet S_2)$. Với mọi $x \in U, w \in W$ ta có

$$\begin{aligned}
\mu_{R \bullet (S_1 \cup S_2)}(x, w) &= \bigvee_{y \in V} [\mu_R(x, y) \cdot (\mu_{S_1}(y, w) \vee \mu_{S_2}(y, w))] \\
&= \bigvee_{y \in V} [(\mu_R(x, y) \cdot \mu_{S_1}(y, w)) \vee (\mu_R(x, y) \cdot \mu_{S_2}(y, w))] \\
&= \bigvee_{y \in V} [\mu_R(x, y) \cdot \mu_{S_1}(y, w)] \vee \bigvee_{y \in V} [\mu_R(x, y) \cdot \mu_{S_2}(y, w)] \\
&= \mu_{R \bullet S_1}(x, w) \vee \mu_{R \bullet S_2}(x, w) \\
&= \mu_{(R \bullet S_1) \cup (R \bullet S_2)}(x, w).
\end{aligned}$$

Do đó $R \bullet (S_1 \cup S_2) = (R \bullet S_1) \cup (R \bullet S_2)$. □

2.2.3 Phép hợp thành max-min

Cho U, V, W là các tập hợp bất kỳ và hai quan hệ mờ $R \in \mathcal{F}(U \times V)$, $S \in \mathcal{F}(V \times W)$. Hợp thành max-min của R và S , ký hiệu $R \star S$, là một quan hệ mờ từ U đến W với hàm thuộc xác định bởi:

$$\forall x \in U, \forall z \in W, \mu_{R \star S}(x, z) = \bigwedge_{y \in V} [\mu_R(x, y) \vee \mu_S(y, z)].$$

Ví dụ 2.7. Xét hai quan hệ mờ R và S ở Ví dụ 2.5.

Ta có

$$R \star S = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 & 0.2 \\ 0.5 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Phép hợp thành max-min có một số tính chất cơ bản sau.

Mệnh đề 2.3.

- (1) Hợp thành max-min có tính kết hợp.
- (2) Hợp thành max-min có tính phân phối với phép giao.

Chứng minh.

(1) Xét các quan hệ mờ $R \in \mathcal{F}(U \times V)$, $S \in \mathcal{F}(V \times W)$ và $T \in \mathcal{F}(W \times Z)$.
Ta sẽ chứng minh $(R \star S) \star T = R \star (S \star T)$. Với mọi $x \in U, z \in Z$ ta có:

$$\begin{aligned} \mu_{(R \star S) \star T}(x, z) &= \bigwedge_{w \in W} [\mu_{R \star S}(x, w) \vee \mu_T(w, z)] \\ &= \bigwedge_{w \in W} [\bigwedge_{y \in V} [\mu_R(x, y) \vee \mu_S(y, w)] \vee \mu_T(w, z)] \\ &= \bigwedge_{w \in W} \bigwedge_{y \in V} [\mu_R(x, y) \vee \mu_S(y, w) \vee \mu_T(w, z)] \\ &= \bigwedge_{y \in V} [\mu_R(x, y) \vee \bigwedge_{w \in W} [\mu_S(y, w) \vee \mu_T(w, z)]] \\ &= \bigwedge_{y \in V} [\mu_R(x, y) \vee \mu_{S \star T}(y, z)] \\ &= \mu_{R \star (S \star T)}(x, z). \end{aligned}$$

(2) Xét quan hệ mờ $R \in \mathcal{F}(U \times V)$ và hai quan hệ mờ $S_1, S_2 \in \mathcal{F}(V \times W)$.
Ta sẽ chứng minh $R \star (S_1 \cap S_2) = (R \star S_1) \cap (R \star S_2)$. Với mọi $x \in U, w \in W$

ta có:

$$\begin{aligned}
\mu_{R \star (S_1 \cap S_2)}(x, w) &= \bigwedge_{y \in V} [\mu_R(x, y) \vee (\mu_{S_1}(y, w) \wedge \mu_{S_2}(y, w))] \\
&= \bigwedge_{y \in V} [(\mu_R(x, y) \vee \mu_{S_1}(y, w)) \wedge (\mu_R(x, y) \vee \mu_{S_2}(y, w))] \\
&= \bigwedge_{y \in V} [\mu_R(x, y) \vee \mu_{S_1}(y, w)] \wedge \bigwedge_{y \in V} [\mu_R(x, y) \vee \mu_{S_2}(y, w)] \\
&= \mu_{R \star S_1}(x, w) \wedge \mu_{R \star S_2}(x, w) \\
&= \mu_{(R \star S_1) \cap (R \star S_2)}(x, w).
\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } R \star (S_1 \cap S_2) = (R \star S_1) \cap (R \star S_2). \quad \square$$

2.3 Các tính chất cơ bản của quan hệ mờ

Cho U là một tập hợp bất kỳ và quan hệ mờ $R \in \mathcal{F}(U^2)$. Ta nói

(1) R có tính phản xạ nếu

$$\mu_R(x, x) = 1, \forall x \in U.$$

(2) R có tính phản phản xạ nếu

$$\mu_R(x, x) = 0, \forall x \in U.$$

(3) R có tính đối xứng nếu

$$\mu_R(x, y) = \mu_R(y, x), \forall x, y \in U.$$

(4) R có tính phản đối xứng nếu

$$\mu_R(x, y) \neq \mu_R(y, x) \text{ hoặc } \mu_R(x, y) = \mu_R(y, x) = 0, \forall x, y \in U, x \neq y.$$

(5) R có tính bắc cầu min-max nếu

$$\mu_R(x, z) \geq \bigvee_{y \in U} [\mu_R(x, y) \wedge \mu_R(y, z)], \forall x, z \in U.$$

(6) R có tính bắc cầu tích-max nếu

$$\mu_R(x, z) \geq \bigvee_{y \in U} [\mu_R(x, y) \cdot \mu_R(y, z)], \forall x, z \in U.$$

(6) R có tính bắc cầu max-min nếu

$$\mu_R(x, z) \leq \bigwedge_{y \in U} [\mu_R(x, y) \vee \mu_R(y, z)], \forall x, z \in U.$$

Như vậy theo định nghĩa của phép hợp thành min-max, quan hệ mờ R có tính bắc cầu min-max nếu và chỉ nếu $\mu_R(x, z) \geq \mu_{R \circ R}(x, z)$ với mọi $x, z \in U$ hay $R \supseteq R \circ R$. Tương tự như vậy quan hệ R có tính bắc cầu tích-max nếu và chỉ nếu $R \supseteq R \bullet R$ và R có tính bắc cầu max-min nếu và chỉ nếu $R \subseteq R \star R$.

Ví dụ 2.8. Cho $U = \{x_1, x_2, x_3\}$. Xét quan hệ mờ $R \in \mathcal{F}(U^2)$ như sau:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0.2 \\ 0.5 & 0.2 & 1 \end{pmatrix}$$

Dễ thấy R có tính phản xạ, đối xứng nhưng không có tính phản đối xứng.

Xét quan hệ mờ $S \in \mathcal{F}(U^2)$ là:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.3 \\ 0.5 & 0.2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ta có S có tính phản phản xạ, phản đối xứng nhưng không có tính đối xứng.

Ví dụ 2.9. Cho $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a \neq b$ và quan hệ mờ $R \in \mathcal{F}((\mathbb{R}_*^+)^2)$ với hàm thuộc xác định bởi $\mu_R(x, y) = e^{-(ax+by)}$.

Dễ thấy $\mu_R(x, x) \neq 1$ nên R không có tính phản xạ. Hơn nữa ta có

$$\begin{aligned} \mu_R(x, y) = \mu_R(y, x) &\Leftrightarrow e^{-(ax+by)} = e^{-(ay+bx)} \\ &\Leftrightarrow ax + by = ay + bx \\ &\Leftrightarrow (a - b)(x - y) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = y. \end{aligned}$$

Suy ra R có tính phản đối xứng nhưng không có tính đối xứng.

Ví dụ 2.10. Cho k là một số nguyên dương và quan hệ mờ $R \in \mathcal{F}(\mathbb{N}^2)$ với hàm thuộc xác định bởi $\mu_R(x, y) = e^{-k(x-y)^2}$.

Ta có $\mu_R(x, x) = e^{-k(x-x)^2} = 1$ với mọi $x \in \mathbb{N}$, suy ra R có tính phản xạ. Hơn nữa R cũng có tính đối xứng vì $\mu_R(x, y) = e^{-k(x-y)^2} = e^{-k(y-x)^2} = \mu_R(y, x)$ với mọi $x, y \in \mathbb{N}$. Tuy nhiên R không có tính bắc cầu min-max vì:

$$\begin{aligned}\mu_{R \circ R}(0, 2) &= \bigvee_{y=0}^{\infty} [\mu_R(0, y) \wedge \mu_R(y, 2)] \\ &= (1 \wedge e^{-4k}) \vee (e^{-k} \wedge e^{-k}) \vee (e^{-4k} \wedge 1) \vee (e^{-9k} \wedge e^{-k}) \vee \dots \\ &= e^{-4k} \vee e^{-k} \vee e^{-4k} \vee e^{-9k} \vee \dots \\ &= e^{-k}\end{aligned}$$

và do đó

$$\mu_R(0, 2) = e^{-4k} < e^{-k} = \mu_{R \circ R}(0, 2).$$

Ví dụ 2.11. Xét quan hệ mờ R trên tập $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ như sau:

$$R = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 & 0 & 0.6 \\ 0.3 & 0.3 & 0 & 0.6 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ta có:

$$R \circ R = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 & 0 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R \bullet R = \begin{pmatrix} 0.09 & 0 & 0 & 0.18 \\ 0.09 & 0.09 & 0 & 0.18 \\ 0.09 & 0.09 & 0.09 & 0.18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

và

$$R \star R = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0 & 0.6 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.6 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Suy ra $R \circ R \subseteq R$, $R \bullet R \subseteq R$ và $R \subseteq R \star R$. Do đó R có tính bắc cầu min-max, tính bắc cầu tích-max và tính bắc cầu max-min.

Quan hệ mờ có những tính chất cơ bản sau

Mệnh đề 2.4. Cho quan hệ mờ $R \in \mathcal{F}(U^2)$. Khi đó

- (1) Nếu R có tính phản xạ thì $R \circ R$ và $R \bullet R$ cũng có tính phản xạ.
- (2) Nếu R có tính đối xứng thì $R \circ R$ và $R \bullet R$ cũng có tính đối xứng.
- (3) Nếu R có tính phản xạ và bắc cầu min-max (tương ứng tích-max) thì $R \circ R = R$ (tương ứng $R \bullet R = R$).

Chứng minh. (1) Sử dụng tính phản xạ của quan hệ mờ R ta có:

$$\begin{aligned} \forall x \in U, \mu_{R \circ R}(x, x) &= \bigvee_{y \in U} [\mu_R(x, y) \wedge \mu_R(y, x)] \\ &\geq \mu_R(x, x) \wedge \mu_R(x, x) \text{ (chọn } y = x) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Suy ra $\mu_{R \circ R}(x, x) = 1$. Do đó quan hệ mờ $R \circ R$ có tính phản xạ.

Chứng minh hoàn toàn tương tự quan hệ mờ $R \bullet R$ cũng có tính phản xạ.

(2) Vận dụng tính đối xứng của quan hệ mờ R ta có:

$$\begin{aligned} \forall x, y \in U, \mu_{R \circ R}(x, y) &= \bigvee_{z \in U} [\mu_R(x, z) \wedge \mu_R(z, y)] \\ &= \bigvee_{z \in U} [\mu_R(z, x) \wedge \mu_R(y, z)] \\ &= \mu_{R \circ R}(y, x). \end{aligned}$$

Suy ra quan hệ mờ $R \circ R$ có tính đối xứng.

Chứng minh hoàn toàn tương tự quan hệ mờ $R \bullet R$ cũng có tính đối xứng.

(3) Theo tính phản xạ của quan hệ mờ R ta có:

$$\begin{aligned} \forall x, y \in U, \mu_{R \circ R}(x, y) &= \bigvee_{z \in U} [\mu_R(x, z) \wedge \mu_R(z, y)] \\ &\geq \mu_R(x, x) \wedge \mu_R(x, y) \text{ (chọn } z = x) \\ &= \mu_R(x, y). \end{aligned}$$

Suy ra $R \circ R \supseteq R$. Ngoài ra theo giả thiết quan hệ mờ R có tính bắc cầu min-max nên $R \supseteq R \circ R$. Như vậy $R \circ R = R$.

Chúng minh hoàn toàn tương tự chúng ta cũng có $R \bullet R = R$. $\square$

Mệnh đề 2.5. Cho quan hệ mờ $R \in \mathcal{F}(U^2)$. Khi đó

- (1) Nếu R có tính phản phản xạ thì $R \star R$ cũng có tính phản phản xạ.
- (2) Nếu R có tính đối xứng thì $R \star R$ cũng có tính đối xứng.
- (3) Nếu R có tính phản phản xạ và bắc cầu max-min thì $R \star R = R$.

Chúng minh. (1) Vận dụng tính phản phản xạ của quan hệ mờ R ta có:

$$\begin{aligned} \forall x \in U, \mu_{R \star R}(x, x) &= \bigwedge_{y \in U} [\mu_R(x, y) \vee \mu_R(y, x)] \\ &\leq \mu_R(x, x) \vee \mu_R(x, x) \text{ (chọn } y = x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Suy ra $\mu_{R \star R}(x, x) = 0$. Điều này có nghĩa quan hệ mờ $R \star R$ có tính phản phản xạ.

(2) Sử dụng tính đối xứng của quan hệ mờ R ta có:

$$\begin{aligned} \forall x, y \in U, \mu_{R \star R}(x, y) &= \bigwedge_{z \in U} [\mu_R(x, z) \vee \mu_R(z, y)] \\ &= \bigwedge_{z \in U} [\mu_R(z, x) \vee \mu_R(y, z)] \\ &= \mu_{R \star R}(y, x). \end{aligned}$$

Do đó quan hệ mờ $R \star R$ có tính đối xứng.

(3) Vận dụng tính phản phản xạ của quan hệ mờ R ta có:

$$\begin{aligned} \forall x, y \in U, \mu_{R \star R}(x, y) &= \bigwedge_{z \in U} [\mu_R(x, z) \vee \mu_R(z, y)] \\ &\leq \mu_R(x, x) \vee \mu_R(x, y) \text{ (chọn } z = x) \\ &= \mu_R(x, y). \end{aligned}$$

Suy ra $R \star R \subseteq R$. Mặt khác theo giả thiết $R \subseteq R \star R$. Như vậy chúng ta thu được $R \star R = R$. $\square$

2.4 Bao đóng bắc cầu

2.4.1 Bao đóng bắc cầu min-max

Xét quan hệ mờ $R \in \mathcal{F}(U^2)$. Với số nguyên dương $k \in \mathbb{N}^*$, ta đặt

$$R^k = \underbrace{R \circ R \circ \cdots \circ R}_{k \text{ lần } R}$$

và

$$\widehat{R} = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k.$$

Lúc đó quan hệ mờ $\widehat{R} \in \mathcal{F}(U^2)$ có các tính chất sau

Mệnh đề 2.6. $\widehat{R}$ là quan hệ mờ nhỏ nhất chứa R và có tính bắc cầu min-max.

Chứng minh. $\widehat{R} \supseteq R$ là rõ ràng. Hơn nữa phép hợp thành min-max có tính phân phối đối với phép hợp nên

$$\begin{aligned} \widehat{R} \circ \widehat{R} &= (R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots) \circ (R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots) \\ &= R^2 \cup R^3 \cup R^4 \cup \cdots \\ &\subseteq R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 \cup \cdots \\ &= \widehat{R}. \end{aligned}$$

Suy ra $\widehat{R} \circ \widehat{R} \subseteq \widehat{R}$, và do đó quan hệ mờ $\widehat{R}$ có tính bắc cầu min-max.

Bây giờ lấy một quan hệ mờ bất kỳ có tính bắc cầu min-max $S \in \mathcal{F}(U^2)$ sao cho $S \supseteq R$. Khi đó $S \supseteq S \circ S \supseteq R \circ R = R^2$. Bằng qui nạp theo $3 \leq k \in \mathbb{N}$, dễ dàng suy ra được $S \supseteq R^k$, và do đó $S \supseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k = \widehat{R}$. Như vậy $\widehat{R}$ là quan hệ mờ có tính bắc cầu min-max nhỏ nhất trên U và chứa R . $\square$

Mệnh đề 2.6 có nghĩa chúng ta có thể xây dựng một quan hệ mờ có tính bắc cầu min-max từ một quan hệ mờ bất kỳ. Quan hệ mờ $\widehat{R}$ được xây dựng như trên được gọi là *bao đóng bắc cầu min-max* của R .

Bao đóng bắc cầu min-max này có một số tính chất cơ bản khác.

Mệnh đề 2.7. Nếu $R^k = R^{k+1}$ với một số nguyên dương k nào đó thì $\widehat{R} = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^k$.

Chứng minh. Dễ thấy nếu $R^k = R^{k+1}$ với mọi $k \in \mathbb{N}^*$, thì $R^k = R^{k+i}$ với mọi $i \in \mathbb{N}$. Từ đây suy ra:

$$\begin{aligned}\widehat{R} &= R \cup R^2 \cup \dots \cup R^k \cup R^{k+1} \cup R^{k+2} \cup \dots \\ &= R \cup R^2 \cup \dots \cup R^k \cup R^k \cup R^k \cup \dots \\ &= R \cup R^2 \cup \dots \cup R^k.\end{aligned}$$

□

Mệnh đề 2.8. Nếu R là một quan hệ mờ trên tập hữu hạn U có n phần tử thì $\widehat{R} = \bigcup_{k=1}^n R^k$.

Ví dụ 2.12. Xét quan hệ mờ R trên tập hữu hạn $U = \{x_1, x_2, x_3\}$ như sau:

$$R = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.5 \\ 0.4 & 1 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ta có

$$R^2 = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & 1 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R^3 = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & 1 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Suy ra

$$\widehat{R} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.5 \\ 0.4 & 1 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.4.2 Bao đóng bắc cầu tích-max

Xét quan hệ mờ $R \in \mathcal{F}(U^2)$. Với số nguyên dương $k \in \mathbb{N}^*$, ta đặt

$$R^{\bullet k} = \underbrace{R \bullet R \bullet \dots \bullet R}_{k \text{ lần } R}$$

và

$$\widehat{R}^{\bullet} = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^{\bullet k}.$$

Quan hệ mờ $\widehat{R}^{\bullet}$ có các tính chất sau

Mệnh đề 2.9. Quan hệ mờ $\hat{R}$ có tính bắc cầu tích-max nhỏ nhất trên U và chứa R .

Chứng minh. $\hat{R} \supseteq R$ là rõ ràng. Phép hợp thành tích-max có tính phân phối đối với phép hợp nên:

$$\begin{aligned}\hat{R} \bullet \hat{R} &= (R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots) \bullet (R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots) \\ &= R^2 \cup R^3 \cup R^4 \cup \dots \\ &\subseteq R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 \cup \dots \\ &= \hat{R}.\end{aligned}$$

Suy ra $\hat{R} \bullet \hat{R} \subseteq \hat{R}$, và do đó quan hệ mờ $\hat{R}$ có tính bắc cầu tích-max.

Ngoài ra nếu S là một quan hệ mờ trên U có tính bắc cầu tích-max và $S \supseteq R$, thì $S \supseteq S \bullet S \supseteq R \bullet R = R^2$. Từ đây bằng qui nạp theo $3 \leq k \in \mathbb{N}$, dễ dàng suy ra được $S \supseteq R^k$, và do đó $S \supseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k = \hat{R}$. Vậy $\hat{R}$ là quan hệ mờ có tính bắc cầu tích-max nhỏ nhất trên U và chứa R . $\square$

Mệnh đề 2.9 cũng có nghĩa chúng ta có thể xây dựng một quan hệ mờ có tính bắc cầu tích-max từ một quan hệ mờ bất kỳ. Quan hệ mờ $\hat{R}$ như trên được gọi là *bao đóng bắc cầu tích-max* của R .

Bao đóng bắc cầu tích-max $\hat{R}$ cũng có các tính chất cơ bản khác như sau

Mệnh đề 2.10. Nếu $R^k = R^{k+1}$ với một số $k \in \mathbb{N}^*$ thì $\hat{R} = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots \cup R^k$.

Chứng minh của Mệnh đề 2.10 hoàn toàn tương tự như Mệnh đề 2.7.

Mệnh đề 2.11. Nếu R là một quan hệ mờ trên tập hữu hạn U có n phần tử thì $\hat{R} = \bigcup_{k=1}^n R^k$.

Ví dụ 2.13. Xét quan hệ mờ R trên tập hữu hạn $U = \{x_1, x_2, x_3\}$ như sau:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ta có

$$R^{\dot{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R^{\dot{3}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Suy ra

$$\hat{R}^{\bullet} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.4.3 Bao đóng bắc cầu max-min

Xét quan hệ mờ $R \in \mathcal{F}(U^2)$. Với số nguyên dương $k \in \mathbb{N}^*$, ta đặt

$$R^{\star k} = \underbrace{R \star R \star \cdots \star R}_{k \text{ lần } R}$$

và

$$\bigvee R = \bigcap_{k=1}^{\infty} R^{\star k}.$$

Quan hệ mờ $\bigvee R$ có tính chất thú vị sau

Mệnh đề 2.12. *Quan hệ mờ $\bigvee R$ có tính bắc cầu max-min lớn nhất và chứa trong R .*

Chứng minh. $\bigvee R \subseteq R$ là hiển nhiên. Phép hợp thành max-min có tính phân phối đối với phép giao nên:

$$\begin{aligned} \bigvee R \star \bigvee R &= (R \cap R^{\star 2} \cap R^{\star 3} \cap \cdots) \star (R \cap R^{\star 2} \cap R^{\star 3} \cap \cdots) \\ &= R^{\star 2} \cap R^{\star 3} \cap R^{\star 4} \cap \cdots \\ &\supseteq R \cap R^{\star 2} \cap R^{\star 3} \cap R^{\star 4} \cap \cdots \\ &= \bigvee R. \end{aligned}$$

Suy ra $\bigvee R \star \bigvee R \supseteq \bigvee R$, và do đó quan hệ mờ $\bigvee R$ có tính bắc cầu max-min chứa trong R .

Ngoài ra nếu S là một quan hệ mờ trên U có tính bắc cầu max-min và $S \subseteq R$, thì $S \subseteq S \star S \subseteq R \star R = R^{\star 2}$. Từ đây và bằng qui nạp theo $3 \leq k \in \mathbb{N}$, dễ dàng suy ra được $S \subseteq R^{\star k}$. Do đó $S \subseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} R^{\star k} = \bigvee R$. Như vậy $\bigvee R$ là quan hệ mờ có tính bắc cầu max-min lớn nhất và chứa trong R . $\square$

Mệnh đề 2.12 có nghĩa chúng ta có thể xây dựng một quan hệ có tính bắc cầu max-min từ một quan hệ mờ bất kỳ. Quan hệ mờ $\bigvee R$ trên được gọi là *bao đóng bắc cầu max-min* của R .

Bao đóng bắc cầu max-min $\bigvee R$ cũng có các tính chất cơ bản sau.

Mệnh đề 2.13. Nếu $R^{\star k} = R^{\star(k+1)}$ với một $k \in \mathbb{N}^*$ thì $\bigvee R = R \cap R^{\star 2} \cap R^{\star 3} \cap \dots \cap R^{\star k}$.

Chứng minh của Mệnh đề 2.13 hoàn toàn tương tự như Mệnh đề 2.7.

Mệnh đề 2.14. Nếu R là một quan hệ mờ trên tập hữu hạn U có n phần tử thì $\bigvee R = \bigcap_{k=1}^n R^{\star k}$.

Ví dụ 2.14. Xét quan hệ mờ R trên tập hữu hạn $U = \{x_1, x_2, x_3\}$ như sau:

$$R = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.5 \\ 0.4 & 1 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ta có

$$R^{\star 2} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R^{\star 3} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Suy ra

$$\bigvee R = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mệnh đề 2.15. Với mọi quan hệ mờ $R \in \mathcal{F}(U^2)$ ta có:

$$\overline{\bigwedge R} = \bigvee R.$$

2.5 Quan hệ thứ tự mờ

Xét quan hệ mờ $R \in \mathcal{F}(U^2)$. Quan hệ R được gọi là *quan hệ tiền thứ tự mờ* (fuzzy preorder relation) nếu R có tính phản xạ và bắc cầu min-max.

Như vậy R là quan hệ tiền thứ tự mờ nếu và chỉ nếu

$$\forall x \in U, \mu_R(x, x) = 1 \text{ và } R \circ R = R.$$

Hơn nữa nếu R là quan hệ tiền thứ tự mờ thì

$$R = R^2 = \dots = R^k = \dots = \hat{R}.$$

Ví dụ 2.15. Xét quan hệ mờ R trên tập số tự nhiên $\mathbb{N}$ như sau:

$$\mu_R(x, y) = e^{-k(x-y)^2}$$

với k là một số nguyên dương cho trước.

Ta đã biết R có tính phản xạ. Tuy nhiên R không có tính bắc cầu min-max, do đó R không phải là quan hệ tiền thứ tự mờ.

Ví dụ 2.16. Xét quan hệ mờ R trên tập $U = \{x_1, x_2, x_3\}$ như sau:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.3 \\ 0 & 1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dễ thấy R có tính phản xạ. Hơn nữa

$$R \circ R = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.3 \\ 0 & 1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R.$$

Như vậy R là một quan hệ tiền thứ tự mờ.

Trường hợp nếu quan hệ mờ R có tính phản xạ, phản đối xứng và bắc cầu min-max thì R được gọi là *quan hệ thứ tự mờ* (fuzzy order relation).

Như vậy một quan hệ thứ tự mờ khi và chỉ khi nó là một quan hệ tiền thứ tự mờ và có thêm tính phản đối xứng.

Chẳng hạn với quan hệ mờ R ở Ví dụ 2.15, R không phải là một quan hệ thứ tự mờ vì nó không phải quan hệ tiền thứ tự mờ. Tuy nhiên với quan hệ mờ R ở Ví dụ 2.16, ta có R là quan hệ tiền thứ tự mờ và ngoài ra R có thêm tính phản đối xứng nên R là một quan hệ thứ tự mờ.

2.6 Quan hệ tương tự mờ

Để biểu diễn ý tưởng của sự gần nhau, sự giống nhau của các đối tượng người ta dùng các quan hệ mờ đặc biệt thỏa mãn ba tính chất phản xạ, đối xứng và bắc cầu min-max. Đây là quan hệ mở rộng của quan hệ tương đương thông thường đã biết, quan hệ mờ này có vai trò quan trọng trong việc xây dựng mô hình CSDL quan hệ mờ.

Quan hệ mờ $R \in \mathcal{F}(U)$ được gọi là *quan hệ giống nhau mờ* nếu R có tính phản xạ và tính đối xứng. Trường hợp quan hệ mờ $\bar{R}$ là quan hệ giống nhau mờ thì R được gọi là *quan hệ không giống nhau mờ*, tức là R có tính phản phản xạ và tính đối xứng. Quan hệ mờ R được gọi là *quan hệ tương tự mờ* nếu R có tính phản xạ, tính đối xứng và tính bắc cầu min-max. Trường hợp nếu quan hệ mờ $\bar{R}$ là quan hệ mờ tương tự thì R được gọi là *quan hệ không tương tự mờ*, tức là R có tính phản phản xạ, tính đối xứng và tính bắc cầu min-max.

Ví dụ 2.17. Xét quan hệ mờ R trên tập $U = \{x_1, x_2, x_3\}$ như sau:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dễ kiểm chứng được quan hệ mờ R có tính phản xạ, tính đối xứng và tính bắc cầu min-max. Suy ra R là một quan hệ tương tự mờ.

Ví dụ 2.18. Xét R là một quan hệ mờ trên tập số tự nhiên $\mathbb{N}$ xác định bởi

$$\mu_R(x, y) = e^{-(x^2 - y^2)}.$$

Ta có R có tính phản xạ và tính đối xứng nên R là một quan hệ giống nhau mờ. Tuy nhiên R không có tính bắc cầu min-max, vì $\mu_R(0, 2) = e^4 \neq e^{-1} = \mu_{R \circ R}(0, 2)$, do đó R không phải là quan hệ tương tự mờ.

2.7 Nguyên lý mở rộng

Nguyên lý mở rộng (extension principle) là một trong những công cụ quan trọng của lý thuyết tập mờ. Nguyên lý này cho phép chúng ta xác định ảnh của một tập mờ qua một ánh xạ.

Cho U và V là hai tập hợp bất kỳ. Xét ánh xạ $f : U \rightarrow V$ và tập mờ $A \in \mathcal{F}(U)$. Ảnh của tập mờ A qua ánh xạ f là một tập mờ $B = f(A) \in \mathcal{F}(V)$

xác định bởi:

$$\mu_B(y) = \begin{cases} \bigvee_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x) & \text{nếu } f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & \text{ngược lại} \end{cases}$$

ở đây $f^{-1}(y) = \{x \in U : f(x) = y\}$.

Ví dụ 2.19. Cho $U = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ và ánh xạ $f : U \rightarrow U$ xác định như sau:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{nếu } x \leq 2 \\ x & \text{ngược lại.} \end{cases}$$

Ta có

$$f^{-1}(0) = \{0\}, f^{-1}(1) = \emptyset, f^{-1}(2) = \{1\}, f^{-1}(3) = \{3\}, f^{-1}(4) = \{2, 4\}.$$

Khi đó với tập mờ $A \in \mathcal{F}(U)$ như sau:

$$A = \frac{1}{0} + \frac{0.1}{1} + \frac{0.5}{2} + \frac{0}{3} + \frac{1}{4}.$$

thì ảnh của A qua ánh xạ f là tập mờ $B \in \mathcal{F}(U)$ xác định bởi:

$$B = \frac{1}{0} + \frac{0}{1} + \frac{0.1}{2} + \frac{0}{3} + \frac{1}{4}.$$

Bài tập

Câu 2.1. Chứng minh Mệnh đề 2.8.

Câu 2.2. Chứng minh Mệnh đề 2.11.

Câu 2.3. Chứng minh Mệnh đề 2.14.

Câu 2.4. Chứng minh mệnh đề 2.15.

Chương 3

Logic mờ

Logic cổ điển là một khoa học chuyên nghiên cứu về sự suy luận chính xác. Cùng với ngôn ngữ, logic là phương tiện cũng như công cụ để con người hiểu biết và trao đổi tư tưởng với nhau. Logic ra đời và phát triển cùng với triết học và toán học. Từ thế kỷ 4 trước công nguyên, Aristote đã sáng lập ra logic truyền thống. Vào thế kỷ 17, Leibnitz đưa toán học vào logic giúp diễn đạt rõ ràng và ngắn gọn quá trình tư duy. Đến thế kỷ 19, George Boole đưa ngôn ngữ ký hiệu vào logic. Từ đây chúng ta có được logic ký hiệu hay còn gọi logic toán¹.

Logic mờ là một mở rộng của logic cổ điển, được J. A. Goguen giới thiệu vào năm 1969. Sau đó năm 1976 L. A. Zadeh sử dụng logic mờ cho lập luận xấp xỉ. Đó là những lập luận dựa trên những tri thức không chính xác, những tri thức mà các đặc trưng cứng nhắc là không có ý nghĩa, đặc biệt những đặc trưng được diễn đạt trong ngôn ngữ tự nhiên. Vì vậy mở rộng logic mờ được xem một cách tiếp cận cho lập luận của con người.

3.1 Biến ngôn ngữ

3.1.1 Định nghĩa

Xét một biến vật lý, chẳng hạn biến “nhiệt độ”. Rõ ràng biến này có thể nhận các giá trị số như 10^0C , 20^0C , 100^0C , ... Tuy nhiên trong đời sống hàng ngày, đôi khi chúng ta không thể biết được chính xác giá trị của biến “nhiệt độ” mà chúng ta chỉ có được thông tin như “khoảng 10^0C ” hay “khoảng 18^0C cho đến 20^0C ” hay thậm chí như “nhiệt độ thấp”, “nhiệt độ cao”... Khi đó chúng ta có thể xem biến “nhiệt độ” lấy các từ như “khoảng”, “thấp”, “cao” làm giá trị của nó. Một biến mà nó nhận các từ hoặc câu trong ngôn ngữ tự nhiên làm giá trị thì biến như vậy được gọi là biến ngôn ngữ (linguistic variable) và các từ như “khoảng”, “thấp”, “cao” được gọi là giá trị ngôn ngữ (linguistic value). Tóm lại biến ngôn ngữ là biến dùng để mô hình hóa những tri thức không chính xác hay mơ hồ về một biến mà giá trị chính xác có thể chưa biết. Khái niệm biến ngôn ngữ này được L. A. Zadeh đưa ra năm 1973.

¹Cũng còn gọi là toán học của logic, thường được hiểu bao gồm các ngành con như lý thuyết mô hình, lý thuyết chứng minh, lý thuyết tập hợp và lý thuyết đệ quy.

Định nghĩa hình thức của nó là như sau.

Một *biến ngôn ngữ* là một bộ bốn (X, T, U, M) trong đó:

- X là *tên biến*,
- T là tập các *giá trị ngôn ngữ* của X ,
- U là tập vũ trụ (hữu hạn hoặc vô hạn) tham chiếu cho X ,
- M là các *luật ngữ nghĩa* (semantic rule) nhằm ánh xạ mỗi giá trị ngôn ngữ $t \in T$ thành một số mờ trên U .

Như vậy biến ngôn ngữ là biến có thể nhận giá trị là các tập mờ rời chuẩn hóa trên một miền nào đó. Để đơn giản bộ bốn (X, T, U, M) còn được gọi là biến ngôn ngữ X .

Ví dụ 3.1. Xét một biến ngôn ngữ mô tả về tuổi như sau: (X, T, U, M) , trong đó

$$X = \text{tuổi},$$

$$T = \{\text{trẻ}, \text{trung niên}, \text{già}\},$$

$$U = [0, 120],$$

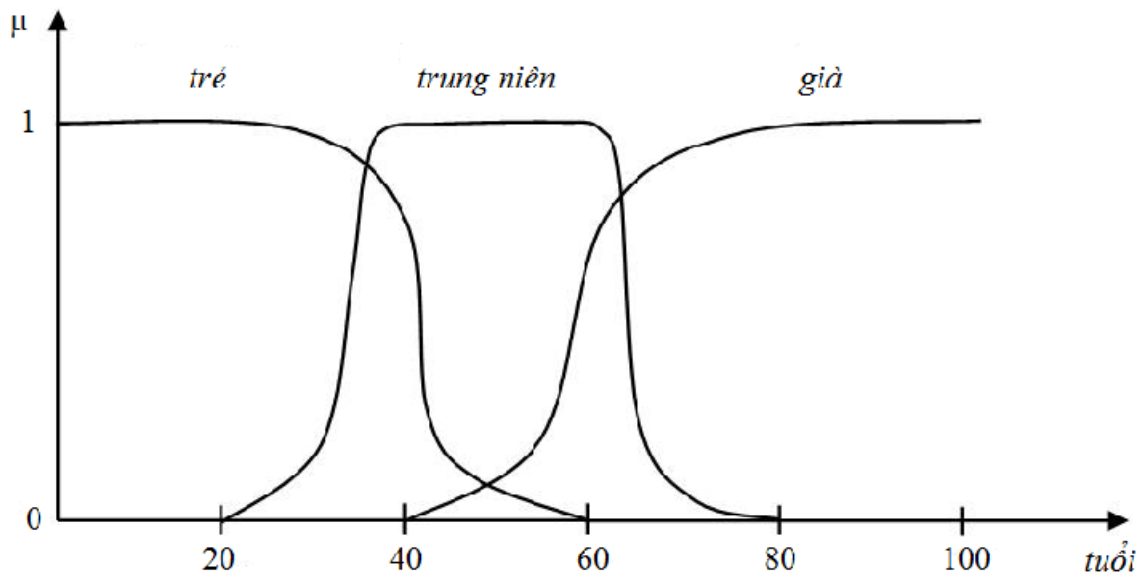
M ánh xạ các giá trị ngôn ngữ trong T thành các số mờ trên U với hàm thuộc tương ứng là:

$$\mu_{\text{trẻ}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \leq 20 \\ \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{x-20}{15}}} & \text{nếu } 20 < x \leq 60 \\ 0 & \text{nếu } x > 60 \end{cases}$$

$$\mu_{\text{trung niên}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \leq 20 \\ \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{x-20}{5}}} & \text{nếu } 20 < x \leq 40 \\ 1 & \text{nếu } 40 < x \leq 60 \\ \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{x-60}{5}}} & \text{nếu } 60 < x \leq 80 \\ 0 & \text{nếu } x > 80 \end{cases}$$

$$\mu_{già}(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \leq 40 \\ \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{x-40}{10}}} & \text{nếu } 40 < x \leq 80 \\ 1 & \text{nếu } x > 80 \end{cases}$$

Sau đây là đồ thị về các số mờ biểu diễn các giá trị ngôn ngữ “trẻ”, “trung niên” và “già”.



Như vậy *tuổi* là một biến ngôn ngữ trên U được đặc trưng bởi tập các số mờ T .

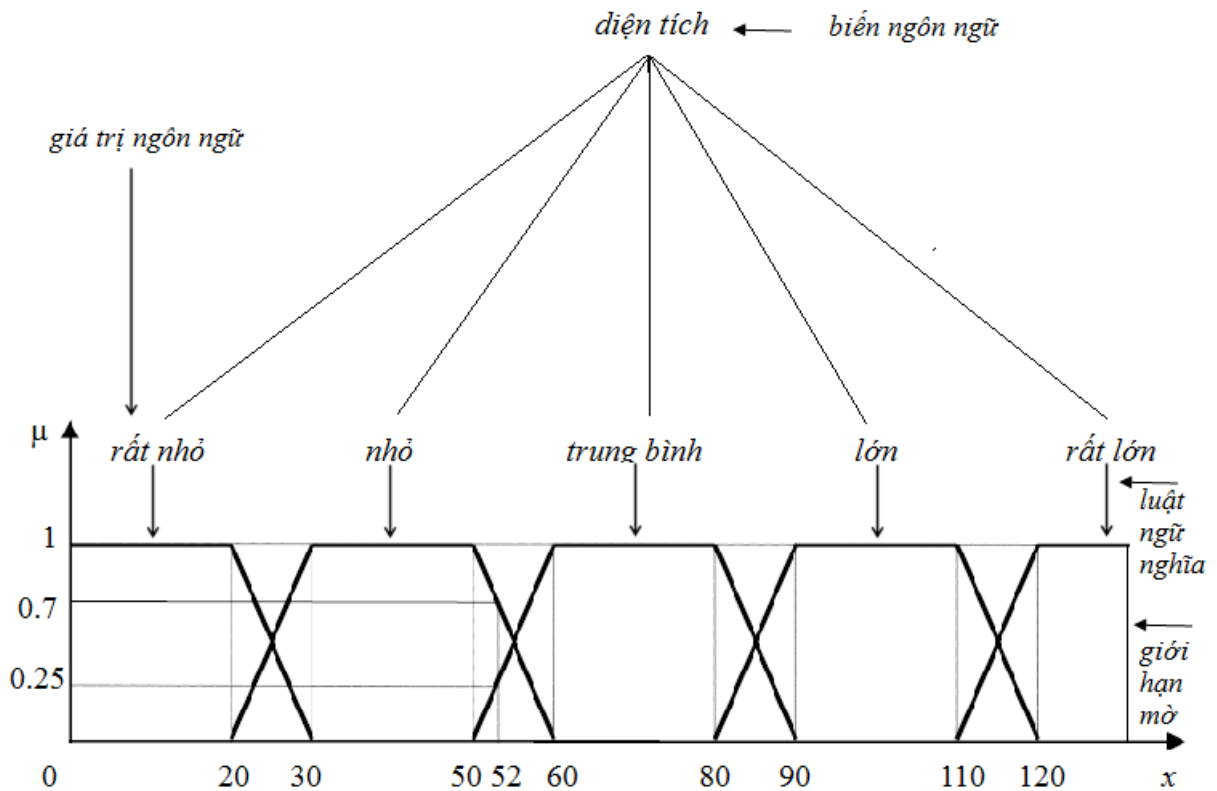
Ví dụ 3.2. Xét một biến ngôn ngữ mô tả độ rộng của một căn hộ (X, T, U, M) trong đó:

$X = \text{diện tích}$,

$T = \{\text{rất nhỏ}, \text{nhỏ}, \text{trung bình}, \text{lớn}, \text{rất lớn}\}$,

U là tập các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ và

M ánh xạ các giá trị ngôn ngữ trong T thành các số mờ trên U , được cho qua đồ thị các số mờ đặc trưng cho biến ngôn ngữ “diện tích”:



Như vậy *diện tích* là một biến ngôn ngữ trên U được đặc trưng bởi các số mờ trong T . Từ đồ thị số mờ đặc trưng cho biến ngôn ngữ *diện tích*, nếu ta giả sử căn hộ có diện tích chính xác $52m^2$ thì nó được xem là căn hộ nhỏ với độ thuộc 0.7, và cũng có thể xem là căn hộ trung bình với độ thuộc 0.25. Ngoài ra khi cần xác định chính xác một diện tích thì chúng ta có thể đưa vào T một tập mờ một phần tử chẳng hạn $85m^2$. Khi đó tập T trở thành $T = \{\text{rất nhỏ}, \text{nhỏ}, \text{trung bình}, 85m^2, \text{lớn}, \text{rất lớn}\}$.

Như vậy tùy theo mục đích ứng dụng của biến ngôn ngữ X , tập T có thể gồm nhiều hay ít phần tử. Khi tập T càng nhiều phần tử thì việc mô tả X càng mịn, ngược lại thì mô tả này càng thô.

3.1.2 Hạng từ mờ và gia tử mờ

Cho biến ngôn ngữ (X, T, U, M) . Các giá trị ngôn ngữ trong T còn được gọi là *hạng từ ngôn ngữ mờ* hay gọn hơn *hạng từ mờ* (fuzzy term).

Chẳng hạn các giá trị ngôn ngữ như *trẻ*, *trung niên*, *già* trong Ví dụ 3.1 là các hạng từ mờ. Các hạng từ mờ này còn được hiểu là các *hạng từ mờ đơn* (simple fuzzy term). Với mỗi hạng từ mờ đơn, chúng ta có thể xây dựng thêm những đặc trưng trung gian mới cho biến ngôn ngữ X nhằm để tăng cường hoặc giảm nhẹ các tính chất mà các hạng từ mờ đơn đã mô tả. Chẳng

hạn với hạn từ mờ *trẻ* ta muốn nhấn mạnh tính chất trẻ bằng cách thêm trợ từ *rất* (*very*) để có được mô tả *rất trẻ* hoặc giảm nhẹ tính chất trẻ bằng cách thêm trợ từ *ít nhiều* (*more or less*) để có được mô tả *ít nhiều là trẻ*. Những hạn từ mờ sau khi có thêm sự tăng cường hay giảm nhẹ như vậy được gọi là *hạn từ mờ sửa đổi* (modified fuzzy term). Còn những trợ từ làm biến đổi mức độ đặc trưng của các hạn từ mờ được gọi là các *gia tử mờ ngôn ngữ* hay gọn hơn *gia tử mờ* (fuzzy hedge). Như vậy những đặc trưng dùng để mô tả biến ngôn ngữ X sẽ gồm những hạn từ mờ đơn trong T hoặc là những hạn từ mờ sửa đổi.

Gia tử ngôn ngữ làm tăng cường tính chất đặc trưng của hạn từ mờ được gọi là các *gia tử thu hẹp*, ngược lại các gia tử có tính giảm nhẹ các tính chất đặc trưng của hạn từ mờ được gọi là *gia tử mở rộng*. Chẳng hạn gia tử *rất* đối với các hạn từ mờ của biến ngôn ngữ *tuổi* là các gia tử thu hẹp, còn gia tử *ít nhiều* là gia tử mở rộng.

3.2 Mệnh đề mờ

Như đã giới thiệu ở đầu chương, logic mờ là sự mở rộng của logic cổ điển trong đó các mệnh đề rõ được thay bằng các mệnh đề mờ. *Mệnh đề mờ* (fuzzy proposition) là một phát biểu có hàm chân trị nhận giá trị trên $[0, 1]$ phụ thuộc vào mức độ đúng của phát biểu. Chẳng hạn các mệnh đề như “tốc độ là chậm”, “nhiệt độ là cao”, “áp suất là thấp”, ... là các mệnh đề mờ.

Như vậy rõ ràng mệnh đề mờ là sự mở rộng của mệnh đề rõ, đó là hàm chân trị của mệnh đề không chỉ nhận giá trị trong tập $\{0, 1\}$ mà là trên đoạn $[0, 1]$. Có nhiều loại mệnh đề mờ. Mục này sẽ giới thiệu các loại mệnh đề mờ sau: mệnh đề mờ không điều kiện và không định tính, mệnh đề mờ không điều kiện và định tính, mệnh đề mờ điều kiện không định tính và mệnh đề mờ điều kiện và định tính. Trong đó hai mệnh đề mờ có điều kiện được xây dựng dựa trên khái niệm kéo theo mờ. Do đó chúng ta sẽ tìm hiểu phép kéo theo mờ trước các mệnh đề mờ có điều kiện này.

3.2.1 Mệnh đề mờ không điều kiện và không định tính

*Mệnh đề mờ không điều kiện và không định tính*² (unconditional and unqualified fuzzy propositions) là phát biểu có dạng chuẩn (canonical) như sau

²Không định tính ở đây được hiểu là không giới hạn chân lý.

$$p : X \text{ là } t$$

trong đó X là biến ngôn ngữ và t là một giá trị ngôn ngữ của X .

Theo định nghĩa biến ngôn ngữ ở trên, giá trị ngôn ngữ t được mô tả bởi một số mờ A trên tập tham chiếu U . Do đó mệnh đề mờ còn có thể phát biểu tương đương lại là

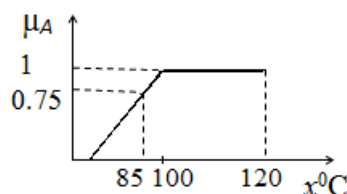
$$p : X \text{ là } A$$

trong đó X là biến ngôn ngữ và A là một số mờ trên U . Khi X nhận giá trị cụ thể $x \in U$ thì *giá trị chân lý* của mệnh đề mờ p xác định bởi hàm:

$$T(p) = \mu_A(x).$$

Điều này có nghĩa giá trị chân lý của mệnh đề mờ “ $p : x \text{ là } A$ ” là mức độ phụ thuộc của x vào tập mờ lõi chuẩn hóa A .

Ví dụ 3.3. Xét mệnh đề mờ “ $p : \text{nhiệt độ là cao}$ ”. Giả sử tập mờ $A = \text{”nhiệt độ cao”}$ trên tập tham chiếu $U = [0, 120]$ ($^{\circ}\text{C}$) cho bởi đồ thị hàm thuộc sau với $\mu_A(85) = 0.75$:



Khi đó mệnh đề mờ “nhiệt độ là 85” có giá trị chân lý là 0.75.

Như vậy mức độ đúng của p phụ thuộc vào giá trị thực của nhiệt độ và định nghĩa cho trước của tập mờ “nhiệt độ cao”. Vai trò của hàm T là cung cấp cho chúng ta “cầu nối” giữa các tập mờ và các mệnh đề mờ.

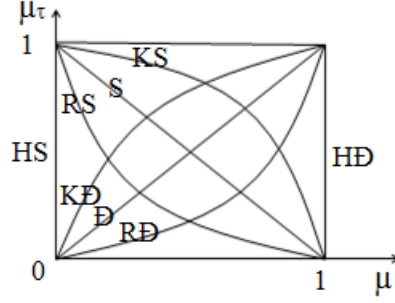
3.2.2 Mệnh đề mờ không điều kiện và định tính

*Mệnh đề mờ không điều kiện và định tính*³ (unconditional and qualified propositions) là mệnh đề có dạng chuẩn là

$$p : (X \text{ là } A) \text{ là } \tau$$

³Định tính ở đây được hiểu là có giới hạn chân lý.

trong đó X là biến ngôn ngữ, A là số mờ trên tập vũ trụ U và τ là từ định tính mờ (tức là phép giới hạn chân lý mờ) như: *hoàn toàn sai* (HS), *rất sai* (RS), *sai* (S), *khá sai* (KS) hay là *khá đúng* ($KĐ$), *đúng* ($Đ$), *rất đúng* ($RĐ$), *hoàn toàn đúng* ($HĐ$). Từ định tính τ là một tập mờ trên $[0, 1]$ như hình vẽ sau:

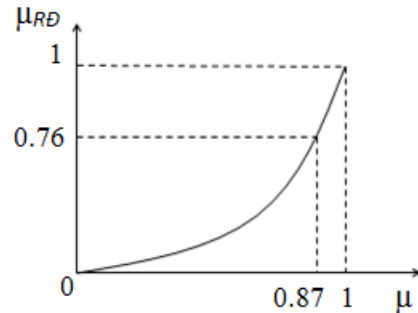
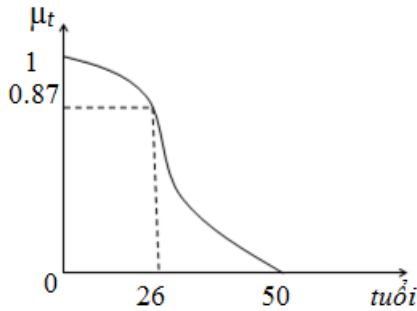


Giá trị chân lý của mệnh đề p xác định bởi hàm:

$$T(p) = \mu_{\tau}(\mu_A(x))$$

khi X nhận giá trị cụ thể $x \in U$.

Ví dụ 3.4. Xét mệnh đề mờ “ p : Tom trẻ là rất đúng”, với các hàm thuộc trẻ μ_t ($t = A$) và hàm thuộc rất đúng $\mu_{RĐ}$ ($RĐ = \tau$) cho bởi như sau:



Khi đó mệnh đề mờ “ p : Tom 26 tuổi là rất đúng” có giá trị chân lý là $T(p) = \mu_{RĐ}(\mu_t(26)) = \mu_{RĐ}(0.87) = 0.76$.

Dễ thấy các mệnh đề mờ không định tính là một trường hợp đặc biệt của mệnh đề mờ định tính với từ định tính τ là đúng ($Đ$), bởi vì với tập mờ đúng ($Đ$) ta luôn có $\mu_{\tau}(\mu) = \mu$ nên $T(p) = \mu_{\tau}(\mu_A(x)) = \mu_A(x)$.

3.2.3 Kéo theo mờ

3.2.3.1 Khái niệm

Kéo theo mờ (fuzzy implication) là một sự mở rộng của kéo theo cổ điển khi hạn chế giá trị chân lý vào tập $\{0, 1\}$. Kéo theo mờ đóng vai trò quan trọng trong biểu diễn tri thức cũng như lập luận xấp xỉ. Tuy vậy chúng ta phải hiểu không có một ràng buộc cứng nhắc về định nghĩa kéo theo mờ, bởi bản chất ngữ nghĩa kéo theo mờ trong ngôn ngữ tự nhiên hay trong lập luận của con người là rất phức tạp. Chính vì vậy cho đến nay đã có nhiều cách tiếp cận để xác định kéo theo mờ.

Kéo theo mờ là một hàm hai biến $I: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, với ý nghĩa nếu a và b là các giá trị chân lý tương ứng của hai mệnh đề mờ p và q nào đó thì $I(a, b)$ sẽ cho ta giá trị chân lý của mệnh đề kéo theo mờ $p \Rightarrow q$.

Mệnh đề kéo theo mờ $p \Rightarrow q$ còn được viết lại là “*Nếu p thì q* ”. Cách viết như thế này được gọi là luật *nếu-thì* mờ. Chẳng hạn các phát biểu sau:

Nếu “nhiệt độ cao” thì “áp suất lớn”,

Nếu “tốc độ nhanh” thì “ma sát lớn”

là các luật *nếu-thì* mờ.

Sau đây là một số kéo theo mờ đã được đề xuất.

(1) *Kéo theo mờ Kleene-Dienes:*

$$I_b(a, b) = \max(1 - a, b), \forall a, b \in [0, 1].$$

(2) *Kéo theo mờ Mamdani:*

$$I(a, b) = \min(a, b), \forall a, b \in [0, 1].$$

Kéo theo mờ này được sử dụng rộng rãi trong các ứng dụng, nhất là trong hệ mờ.

(3) *Kéo theo mờ Reichenbach:*

$$I_r(a, b) = 1 - a + ab, \forall a, b \in [0, 1].$$

(4) *Kéo theo mờ Lukasiewicz:*

$$I_a(a, b) = \min(1, 1 - a + b), \forall a, b \in [0, 1].$$

(5) *Kéo theo mờ Goguen:*

$$I_{Goguen}(a, b) = \min(1, \frac{b}{a}), \forall a, b \in [0, 1].$$

(6) *Kéo theo mờ Gaines-Rescher:*

$$I_{GR}(a, b) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } a \leq b \\ 0 & \text{ngược lại} \end{cases}, \forall a, b \in [0, 1].$$

(7) *Kéo theo mờ Godel:*

$$I_{Godel}(a, b) = \sup\{x : \min(a, x) \leq b\} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } a \leq b \\ b & \text{ngược lại} \end{cases}, \forall a, b \in [0, 1].$$

(8) *Kéo theo mờ Wu:*

$$I_W(a, b) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } a \leq b \\ \min(1 - a, b) & \text{ngược lại} \end{cases}, \forall a, b \in [0, 1].$$

3.2.3.2 Tiếp cận theo tiên đề

Bây giờ chúng ta tìm hiểu một số điều kiện của hàm kéo theo mờ và xem chúng như là các tiên đề của hàm kéo theo mờ. Tuy nhiên như chúng ta đã biết ngữ nghĩa của kéo theo mờ trong ngôn ngữ tự nhiên hay lập luận của con người là rất phức tạp, do đó khó có thể xây dựng được một hệ tiên đề đủ cho mọi tình huống. Chỉ có ứng dụng thực tiễn là tiêu chuẩn cuối cùng chứng minh tính phù hợp của một định nghĩa kéo theo mờ. Vì vậy các tiên đề sau không nhất thiết bắt buộc mọi kéo theo mờ phải thỏa mãn.

(I1) *Tính đơn điệu giảm đối với biến tiền đề*

$$a \leq c \Rightarrow I(a, b) \geq I(c, b), \forall b \in [0, 1].$$

Tiên đề này có nghĩa: giá trị chân lý của mệnh đề kéo theo mờ tăng khi giá trị chân lý của tiền đề giảm.

(12) Tính đơn điệu tăng đối với biến hậu đề

$$b \leq d \Rightarrow I(a, b) \leq I(a, d), \forall a \in [0, 1].$$

Giá trị chân lý của mệnh đề kéo theo mờ tăng khi giá trị chân lý của hậu đề tăng.

(13) Tính ưu thế của giá trị chân lý sai

$$I(0, b) = 1.$$

Mệnh đề kéo theo mờ luôn đúng khi giá trị chân lý của tiền đề sai.

(14) Tính trung tính của giá trị chân lý đúng

$$I(1, b) = b.$$

Giá trị chân lý của mệnh đề kéo theo mờ bằng giá trị chân lý của hậu đề khi tiền đề đúng.

(15) Tính đồng nhất

$$I(a, a) = 1.$$

Giá trị chân lý của mệnh đề kéo theo mờ luôn đúng khi giá trị chân lý của tiền đề và hậu đề là giống nhau.

(17) Tính thứ tự

$$I(a, b) = 1 \Leftrightarrow a \leq b.$$

(16) Tính trao đổi

$$I(a, I(b, c)) = I(b, I(a, c)).$$

(18) Tính phản đảo

$$I(a, b) = I(N(b), N(a)), \text{ ở đây } N \text{ là hàm phủ định.}$$

(19) Tính liên tục

I là một hàm liên tục.

Đảm bảo thay đổi nhỏ ở giá trị chân lý của tiền đề hay hậu đề không làm thay đổi lớn ở giá trị chân lý của mệnh đề kéo theo mờ.

Theo một quan điểm nào đó, tiên đề (I9) là một yêu cầu tự nhiên. Tuy nhiên nhiều kéo theo mờ đã biết không thỏa tính liên tục này, chẳng hạn kéo theo mờ Godel hay Goguen.

Kết quả sau là một điều kiện cần và đủ để một kéo theo mờ thỏa các tiên đề từ (I1) đến (I9).

Định lý 3.1 (Smets & Magres, 1987). *Hàm hai biến $I: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ thỏa các tiên đề (I1)-(I9) về kéo theo mờ nếu và chỉ nếu tồn tại một hàm liên tục đơn điệu tăng nghiêm ngặt $f: [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$ sao cho*

$$(i) f(0) = 0$$

$$(ii) I(a, b) = f^{-1}(f(1) - f(a) + f(b)), \forall a, b \in [0, 1]$$

$$(iii) N(a) = f^{-1}(f(1) - f(a)), \forall a \in [0, 1].$$

Ví dụ 3.5. Kéo theo Lukasiewics ở trên thỏa Định lý 3.1 với f là một hàm đồng nhất và hàm phủ định $N(a) = 1 - a$.

Ví dụ 3.6. Xét hàm $f(a) = \ln(1 + a)$ với hàm ngược

$$f^{-1}(a) = \begin{cases} e^a - 1 & \text{nếu } 0 \leq a \leq \ln 2 \\ 1 & \text{nếu } \ln 2 < a \leq 1 \end{cases}$$

và hàm phủ định đi cùng với f là $N(a) = \frac{1 - a}{1 + a}$, với $a \in [0, 1]$.

Khi đó kéo theo mờ được xác định là

$$I(a, b) = \min(1, \frac{1 - a + 2b}{1 + a}), \forall a, b \in [0, 1].$$

Ví dụ 3.7. Xét mở rộng của Ví dụ 3.6, đó là hàm $f(a) = \ln(1 + \lambda a)$ với λ là tham số dương. Khi đó hàm ngược

$$f^{-1}(a) = \begin{cases} \frac{e^a - 1}{\lambda} & \text{nếu } 0 \leq a \leq \ln 2 \\ 1 & \text{nếu } \ln 2 < a \leq 1 \end{cases}$$

và hàm phủ định trong trường hợp này là hàm Sugeno

$$N_\lambda(a) = \frac{1 - a}{1 + \lambda a}, \forall a \in [0, 1].$$

Kéo theo mờ khi đó được xác định là

$$I_\lambda(a, b) = \min\left(1, \frac{1 - a + b + \lambda b}{1 + \lambda a}\right), \forall a, b \in [0, 1].$$

3.2.4 Mệnh đề mờ có điều kiện và không định tính

Mệnh đề mờ có điều kiện và không định tính (conditional and unqualified fuzzy propositions) là phát biểu có dạng chuẩn như sau

$$p : \text{Nếu } X \text{ là } A, \text{ thì } Y \text{ là } B$$

trong đó X và Y là các biến ngôn ngữ, A và B là các số mờ tương ứng trên U và V .

Mệnh đề mờ p ở trên xác định một quan hệ mờ R giữa hai đại lượng X và Y , tức R là một tập mờ trên $U \times V$. Khi đó mệnh đề mờ p có thể viết lại dưới dạng:

$$p : (X, Y) \text{ là } R$$

trong đó quan hệ mờ R xác định bởi

$$\mu_R(x, y) = I(\mu_A(x), \mu_B(y))$$

ở đây I là một hàm kéo theo mờ.

Khi đã xây dựng xong hàm thuộc μ_R và X, Y nhận giá trị cụ thể tương ứng $x \in U, y \in V$ thì *giá trị chân lý* của p xác định bởi:

$$T(p) = \mu_R(x, y).$$

Ví dụ 3.8. Cho $U = \{x_1, x_2, x_3\}$ và $V = \{y_1, y_2\}$. Giả sử các tập mờ A và B tương ứng trên U và V là:

$$A = \frac{0.1}{x_1} + \frac{0}{x_2} + \frac{1}{x_3},$$

$$B = \frac{0.2}{y_1} + \frac{1}{y_2}.$$

Xét mệnh đề mờ “ p : Nếu X là A , thì Y là B ”.

Nếu ta chọn hàm kéo theo mờ Lukasiewicz $I_a(a, b) = \min(1, 1 - a + b)$ thì mệnh đề mờ p có giá trị chân lý là:

x	y	$\mu_A(x)$	$\mu_B(y)$	$1 - \mu_A(x) + \mu_B(y)$	$T(p)$
x_1	y_1	0.1	0.2	1.1	1
x_1	y_2	0.1	1	1.9	1
x_2	y_1	0	0.2	1.2	1
x_2	y_2	0	1	2	1
x_3	y_1	1	0.2	0.2	0.2
x_3	y_2	1	1	1	1

3.2.5 Mệnh đề mờ có điều kiện và định tính

Mệnh đề mờ có điều kiện và định tính (conditional and qualified fuzzy propositions) là phát biểu có dạng chuẩn như sau

$$p : (\text{Nếu } X \text{ là } A, \text{ thì } Y \text{ là } B) \text{ là } \tau$$

trong đó X và Y là các biến ngôn ngữ, A và B là các số mờ tương ứng trên U và V , và τ là từ định tính mờ biểu diễn trên $[0, 1]$.

Mệnh đề mờ p ở trên xác định một quan hệ mờ R^* trên tập $U \times V$ với hàm thuộc là

$$\mu_{R^*}(x, y) = \mu_\tau(\mu_R(x, y)).$$

Khi đã xây dựng xong hàm thuộc μ_{R^*} và X, Y tương ứng nhận giá trị cụ thể $x \in U, y \in V$ thì *giá trị chân lý* của p xác định bởi:

$$T(p) = \mu_{R^*}(x, y).$$

3.3 Suy diễn mờ

Suy diễn mờ ở đây là suy diễn từ các mệnh đề mờ có điều kiện. Luật suy diễn ở logic cổ điển dựa trên các mệnh đề hằng đúng và các luật diễn này được tổng quát hóa ở logic mờ để ứng dụng cho lập luận xấp xỉ. Mục này sẽ tổng quát hóa các luật suy diễn thường gặp trong logic cổ điển như: *luật Modus Ponens*, *luật Modus Tollens* và *luật bắc cầu*. Các luật này còn gọi là *luật suy diễn hợp thành* vì chúng sử dụng toán tử hợp thành trong suy diễn.

3.3.1 Luật suy diễn mờ Modus Ponens

Luật suy diễn mờ Modus Ponens là luật suy diễn có dạng tổng quát như sau:

Mệnh đề 1 (Luật): Nếu X là A , thì Y là B

Mệnh đề 2 (Sự kiện): X là A'

Kết luận:

Y là B'

trong đó X, Y là các biến ngôn ngữ tương ứng trên U, V ; A, A' là các tập mờ trên U và B, B' là các tập mờ trên V .

Khác với luật suy diễn Modus Ponens cổ điển là sự kiện trong Mệnh đề 2 phải chính xác trùng với điều kiện của Mệnh đề 1, ở đây sự kiện (thu được từ một quan sát nào đó) chỉ cần xấp xỉ “ X là A' ”, với ý nghĩa nếu A' càng gần A thì ta thu được kết luận “ Y là B' ” với B' càng gần B . Vấn đề còn lại là làm thế nào để đánh giá được tập mờ B' . Như đã biết ở trên, từ Mệnh đề 1 chúng ta có quan hệ mờ R trên $U \times V$ xác định bởi

$$\mu_R(x, y) = I(\mu_A(x), \mu_B(y))$$

trong đó I là một hàm kéo theo mờ. Khi đó tập mờ B' được xác định từ tập mờ A' và quan hệ mờ R như sau:

$$\mu_{B'}(y) = \bigvee_{x \in U} [\mu_{A'}(x) \wedge \mu_R(x, y)], \forall y \in V.$$

Tức B' là tập mờ cảm sinh từ A' và R : $B' = A' \circ R$.

Ví dụ 3.9. Cho $U = \{x_1, x_2, x_3\}$ và $V = \{y_1, y_2\}$. Xét mệnh đề mờ “ p : X là A , thì Y là B ”, với các tập mờ $A \in \mathcal{F}(U)$ và $B \in \mathcal{F}(V)$ cho bởi:

$$A = \frac{0.2}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{0.5}{x_3}, B = \frac{1}{y_1} + \frac{0.1}{y_2}.$$

Giả sử có sự kiện “ X là A' ” với tập mờ $A' \in \mathcal{F}(U)$ xác định:

$$A' = \frac{0.5}{x_1} + \frac{0.8}{x_2} + \frac{0.6}{x_3}.$$

Sử dụng luật suy diễn mờ Modus Ponens, ta thu được kết luận “ Y là B' ” với tập mờ $B' \in \mathcal{F}(V)$ được xác định như sau.

Nếu sử dụng hàm kéo mờ theo Lukasiewicz thì quan hệ mờ $R \in \mathcal{F}(U \times V)$ tính được là:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0.9 \\ 1 & 0.1 \\ 1 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Khi đó tập mờ cảm sinh $B' = A' \circ R$ sẽ là:

$$B' = \frac{0.8}{y_1} + \frac{0.6}{y_2}.$$

Trường hợp nếu sử dụng hàm kéo theo mờ Mamdani thì quan hệ mờ R là:

$$R = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 1 & 0.1 \\ 0.5 & 0.1 \end{pmatrix}$$

và tập mờ B' sẽ là:

$$B' = \frac{0.8}{y_1} + \frac{0.1}{y_2}.$$

Ví dụ 3.10. Giả sử quan hệ nhiệt độ và áp suất trong một thiết bị được biểu diễn bởi luật sau:

Nếu ”nhiệt độ là cao” thì ”áp suất là lớn”.

Giả sử nhiệt độ (tính bằng $^{\circ}C$) nhận giá trị trong miền $U = [30, 35, 40, 45]$ và áp suất (tính bằng atm) nhận giá trị trong miền $V = [50, 55, 60, 65]$.

Giả sử các tập mờ $A = \text{"nhiệt độ cao"} \in \mathcal{F}(U)$ và $B = \text{"áp suất lớn"} \in \mathcal{F}(V)$ cho bởi:

$$A = \frac{0}{30} + \frac{0.5}{35} + \frac{0.8}{40} + \frac{1}{45},$$

$$B = \frac{0}{50} + \frac{0.6}{55} + \frac{1}{60} + \frac{1}{65}.$$

Nếu sử dụng luật suy diễn mờ Modus-Ponens với hàm kéo theo chẳng hạn Mamdani, thì với sự kiện tập mờ $A' = \text{"nhiệt độ trung bình"}$ cho bởi

$$A' = \frac{0.6}{30} + \frac{0}{35} + \frac{0.8}{40} + \frac{0.2}{45},$$

chúng ta thu được kết luận về tập mờ áp suất B' như sau:

Đầu tiên quan hệ mờ $R \in \mathcal{F}(U \times V)$ tính được là

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.6 & 0.8 & 0.8 \\ 0 & 0.6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Từ đây suy ra tập mờ $B' = A' \circ R$:

$$B' = \frac{0}{50} + \frac{0.6}{55} + \frac{0.8}{60} + \frac{0.8}{65}.$$

3.3.2 Luật suy diễn mờ Modus Tollens

Luật suy diễn mờ Modus Tollens là luật suy diễn có dạng tổng quát như sau:

Mệnh đề 1 (Luật): Nếu X là A , thì Y là B

Mệnh đề 2 (Sự kiện): Y là B'

Kết luận: X là A'

trong đó X, Y là các biến ngôn ngữ tương ứng trên U, V ; A, A' là các tập mờ trên U và B, B' là các tập mờ trên V .

Tương tự như trên từ Mệnh đề 1 chúng ta có quan hệ mờ R trên $U \times V$ xác định bởi

$$\mu_R(x, y) = I(\mu_A(x), \mu_B(y))$$

trong đó I là một hàm kéo theo mờ. Khi đó tập mờ A' được xác định từ quan hệ mờ R và tập mờ B' như sau:

$$\mu_{A'}(x) = \bigvee_{y \in V} [\mu_R(x, y) \wedge \mu_{B'}(y)], \forall x \in U.$$

Tức A' là tập mờ cảm sinh từ R và B' : $A' = R \circ B'$.

Ví dụ 3.11. Cho $U = \{x_1, x_2, x_3\}$ và $V = \{y_1, y_2\}$. Xét mệnh đề mờ “ p : X là A , thì Y là B ”, với các tập mờ $A \in \mathcal{F}(U)$ và $B \in \mathcal{F}(V)$ cho bởi:

$$A = \frac{0.2}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{0.5}{x_3}, B = \frac{1}{y_1} + \frac{0.1}{y_2}.$$

Cho sự kiện “ Y là B' ” với tập mờ $B' \in \mathcal{F}(V)$ xác định:

$$B' = \frac{0.8}{y_1} + \frac{0.6}{y_2}.$$

Sử dụng luật suy diễn mờ Modus Tollens, ta thu được kết luận “ X là A' ” với tập mờ $A' \in \mathcal{F}(U)$ được xác định như sau.

Nếu sử dụng hàm kéo mờ theo Lukasiewicz thì quan hệ mờ $R \in \mathcal{F}(U \times V)$ tính được là

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0.9 \\ 1 & 0.1 \\ 1 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Khi đó tập mờ cảm sinh $A' = R \circ B'$ sẽ là:

$$A' = \frac{0.8}{x_1} + \frac{0.8}{x_2} + \frac{0.8}{x_3}.$$

Trường hợp nếu sử dụng hàm kéo theo mờ Mamdani thì quan hệ mờ R là

$$R = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 1 & 0.1 \\ 0.5 & 0.1 \end{pmatrix}$$

và tập mờ A' sẽ là

$$A' = \frac{0.2}{x_1} + \frac{0.8}{x_2} + \frac{0.5}{x_3}.$$

3.3.3 Luật suy diễn mờ bắc cầu

Luật suy diễn mờ bắc cầu là luật suy diễn có dạng tổng quát như sau:

Mệnh đề 1 (Luật 1): *Nếu X là A , thì Y là B*

Mệnh đề 2 (Luật 2): *Nếu Y là B , thì Z là C*

Kết luận: *Nếu X là A , thì Z là C*

trong đó X, Y, Z là các biến ngôn ngữ tương ứng trên U, V, W và A, B, C là các tập mờ tương ứng trên U, V, W .

Từ Mệnh đề 1 và Mệnh đề 2 chúng ta có các quan hệ mờ $R_1 \in \mathcal{F}(U \times V)$ và $R_2 \in \mathcal{F}(V \times W)$ tương ứng là

$$\mu_{R_1}(x, y) = I(\mu_A(x), \mu_B(y))$$

và

$$\mu_{R_2}(y, w) = I(\mu_B(y), \mu_C(w))$$

ở đây I là một hàm kéo theo mờ. Khi đó quan hệ mờ $R_3 \in \mathcal{F}(U \times W)$ xác định từ các quan hệ mờ R_1 và R_2 như sau:

$$\mu_{R_3}(x, w) = \bigvee_{y \in V} [\mu_{R_1}(x, y) \wedge \mu_{R_2}(y, w)], \forall x \in U, w \in W.$$

Đây chính quan hệ mờ biểu diễn của mệnh đề mờ “nếu X là A , thì Z là C ” rút ra được từ suy diễn mờ bắc cầu. Để ý rằng $R_3 = R_1 \circ R_2$.

Ví dụ 3.12. Cho $U = \{x_1, x_2, x_3\}$, $V = \{y_1, y_2\}$ và $W = \{w_1, w_2\}$. Xét mệnh đề mờ “ p_1 : X là A , thì Y là B ”, với các tập mờ $A \in \mathcal{F}(U)$ và $B \in \mathcal{F}(V)$ cho bởi:

$$A = \frac{0.2}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{0.5}{x_3}, B = \frac{1}{y_1} + \frac{0.1}{y_2}.$$

Xét mệnh đề mờ “ p_2 : Y là B , thì Z là C ”, trong đó tập mờ $C \in \mathcal{F}(W)$ cho bởi:

$$C = \frac{0.1}{w_1} + \frac{1}{w_2}.$$

Khi đó nếu chọn hàm kéo theo mờ Godel là

$$I(a, b) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } a \leq b \\ b & \text{ngược lại} \end{cases}$$

với mọi $a, b \in [0, 1]$, thì ta có

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 \\ 1 & 0.1 \\ 1 & 0.1 \end{pmatrix} \text{ và } R_2 = \begin{pmatrix} 0.1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Từ đây suy ra

$$R_3 = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$$

3.4 Ứng dụng của logic mờ

Các lĩnh vực ứng dụng của logic mờ bắt đầu phong phú từ những năm 1970 trở đi. Tuy nhiên chúng ta phải hiểu khi xây dựng một ứng dụng thì logic mờ phải được xem như một công cụ bổ sung vào những công cụ truyền thống sẵn có (như logic cổ điển, tự động hóa, vận trù học, ...). Logic mờ không phải luôn được xem là một giải pháp tiên quyết, bắt buộc cho việc xây dựng các ứng dụng. Do đó chúng ta phải tìm hiểu liệu các ứng dụng đó có những đặc điểm gì mà việc đưa logic mờ vào là hữu ích. Dưới đây là một số lý do có thể

xem xét để sử dụng logic mờ:

- Tri thức liên quan đến hệ thống cần xây dựng không hoàn chỉnh, tức là một phần trong số chúng là không chính xác và có thể không chắc chắn.
- Một số tri thức của chuyên gia hay của người quan sát có thể biểu diễn bằng ngôn ngữ tự nhiên, trong khi một số khác lại là dạng số được cung cấp bởi các thiết bị đo. Khi đó việc xử lý đồng thời các dạng tri thức khác nhau đó trên cùng các biến hay thuộc tính chỉ có thể thực hiện một cách đơn giản trong khuôn khổ của logic mờ.
- Những người liên quan đến việc xây dựng hệ thống, chẳng hạn như người giám sát hay người sử dụng hệ thống, thường đưa ra những mô tả chủ quan theo cảm nhận của họ.
- Những tri thức có cấp độ về hệ thống.
- Ranh giới giữa những lớp đối tượng không được định nghĩa rõ ràng, chính xác, có thể có phần chùng lên nhau.
- Không tồn tại mô hình chặt chẽ cho việc giải quyết vấn đề hoặc là mô hình đó quá phức tạp.

Sau đây là một số lĩnh vực kỹ thuật đã có những ứng dụng của logic mờ:

1. Lập luận xấp xỉ
2. Hệ chuyên gia
3. Hệ trợ giúp ra quyết định
4. Thuật toán di truyền
5. Tối ưu hóa
6. Lập lịch
7. Nhận dạng
8. Xử lý ảnh
9. Cơ sở dữ liệu
10. Ngôn ngữ lập trình
11. Điều khiển mờ

Có rất nhiều ứng dụng của điều khiển mờ, có thể phân loại thành các chủ đề như sau:

- Giao thông: xe tự hành (truyền tự động, xe không người lái, duy trì tốc độ và hướng, ABS, hệ thống chống ồn, điều chỉnh hãm, dừng nghỉ tích cực), tàu điện ngầm không người lái, tàu con thoi (kiểm tra độ cao, hệ thống chống va chạm, xếp hàng hóa), trục thăng (trục thăng không người lái, tự quay), thiết bị cầu (cần cầu).

- Quy trình công nghiệp: sản xuất xi măng, nhà máy xử lý nước, điều chỉnh nhiệt độ của lò phản ứng hóa học, khoan các đường ngầm, máy mài, máy trộn nguyên liệu trong luyện gang thép, sản xuất giấy, thiết bị mài điện tử để chạm khắc, hệ thống bốc dỡ, sản xuất ethylen, lên men rượu sa kê, lò nướng của nhà máy thực phẩm, tàu hộ tống, cánh tay người máy để cầm nắm các vật thể có độ rắn thay đổi, máy cắt bằng laser, lò đốt rác, kiểm soát hệ thống phân phối nước.
- Ứng dụng dân dụng: điều hòa không khí trong nhà hoặc trong phòng hoặc trong đường hầm, hệ thống thang máy, máy giặt, máy sấy, tủ lạnh, máy hút bụi, vô tuyến, quạt, lò vi sóng, lò nướng hỗn hợp, ...
- Kỹ thuật: thiết bị đếm xung điện thoại, máy bán vé tự động, máy quay phim, máy in, ...

Bài tập

Câu 3.1. Chứng minh Định lý 3.1.

Tài liệu tham khảo

- [1] Bouchon-Meunier B., Hồ Thuần, Đặng Thanh Hà, *logic mờ và ứng dụng*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà nội, 2007.
- [2] Nguyễn Như Phong, *Lý thuyết mờ và ứng dụng*, Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, 2007.
- [3] Nguyễn Như Phong, *Tính toán mềm và ứng dụng*, Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, 2008.
- [4] Nguyễn Trọng Thuần, *Điều khiển logic và ứng dụng*, Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, 2000.
- [5] Đinh Mạnh Tường, *Trí tuệ nhân tạo*, Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, 2002.

Tiếng Anh

- [6] Kaufmann A., *Theory of fuzzy subsets*, Academic Press, New York, 1975.
- [7] Bede B., *Mathematics of fuzzy sets and fuzzy logic*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013.
- [8] Lee K. H., *First course on fuzzy theory and application*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.
- [9] George J. K., Bo Yuan, *Fuzzy sets and fuzzy logic-Theory and applications*, Prentice Hall PTR, 1995.